TB_SRM1 : Structure et résistance des matériaux 1

Chapitre 1. Forces, Moments, Couples

LAC Lugano Arte e Cultura, Gianola, 2014, experiencelugano.com

Hes·SO//GENÈVE
Haute Ecole Spécialisée de Suisse occidentale

hepia
Haute école du paysage, d'ingénierie et d'architecture de Genève

Plan du chapitre

Forces

- Définition, caractérisation
- Composantes d'une force
- Addition d'un système de force
  - Addition de deux forces
  - Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes
  - Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Moments

- Définition, caractérisation
- Moment d'une force
- Moment d'un couple de forces

Eléments de réduction d'un système de forces

- Réduction d'un système de forces parallèles
- Réduction d'une force répartie

Force : Définition, caractérisation

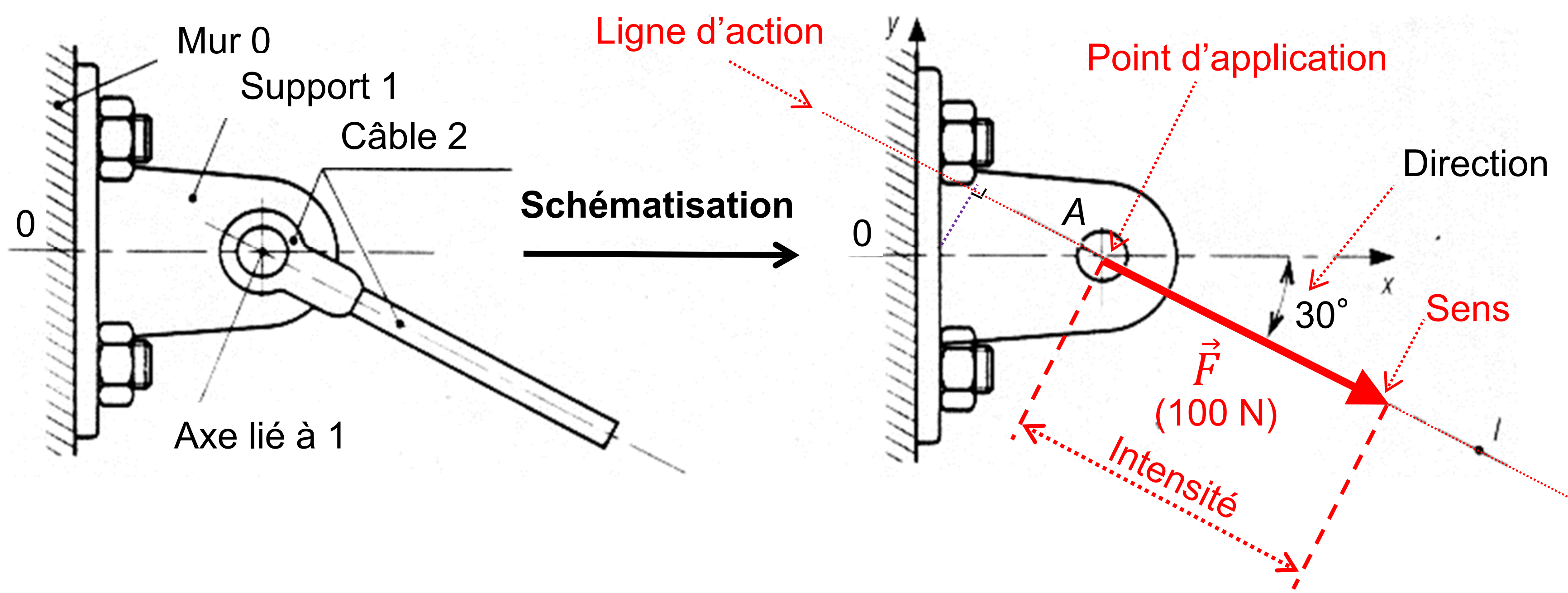
Définition

Action mécanique qui peut être :

- Transmise par un solide
- Provoquée par une action à distance

Caractérisation

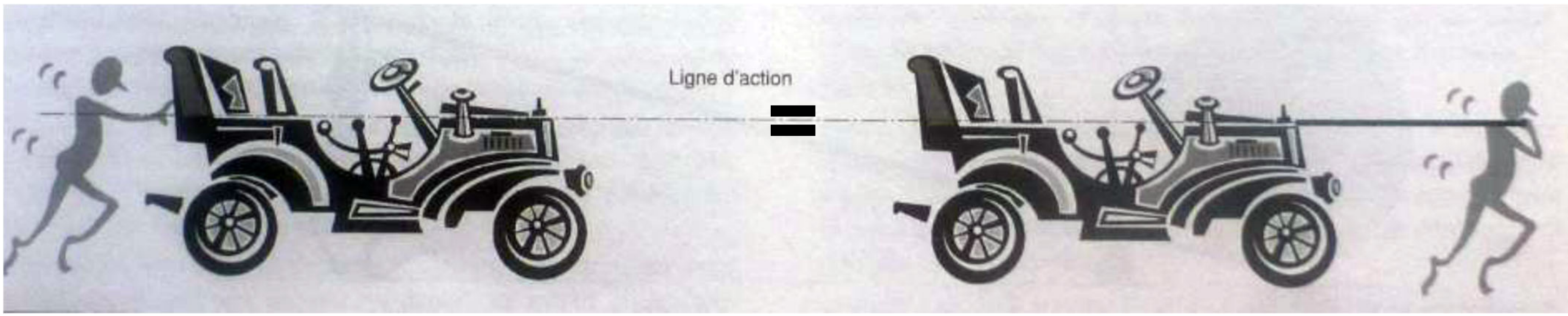
- Point d'application
- Ligne d'action / support
- Sens
- Intensité (N : Newton)

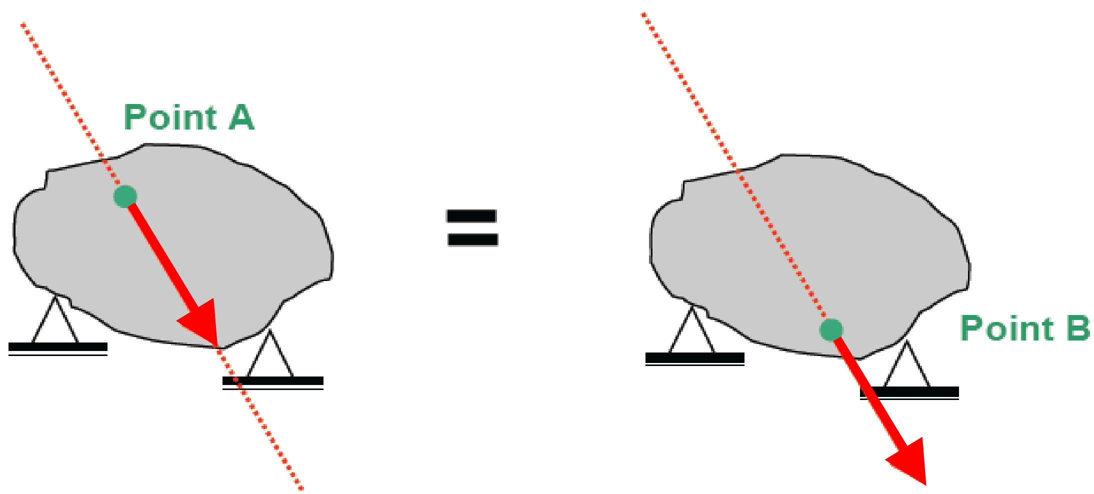


Force ⟺ Mouvement de translation

Force : Définition, caractérisation

On peut toujours déplacer le point d'application d'une force le long de sa propre ligne d'action sans modifier les actions ou les effets de la force sur le corps.

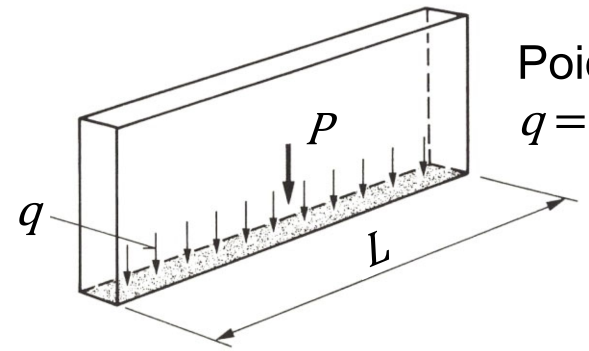




Force : Types

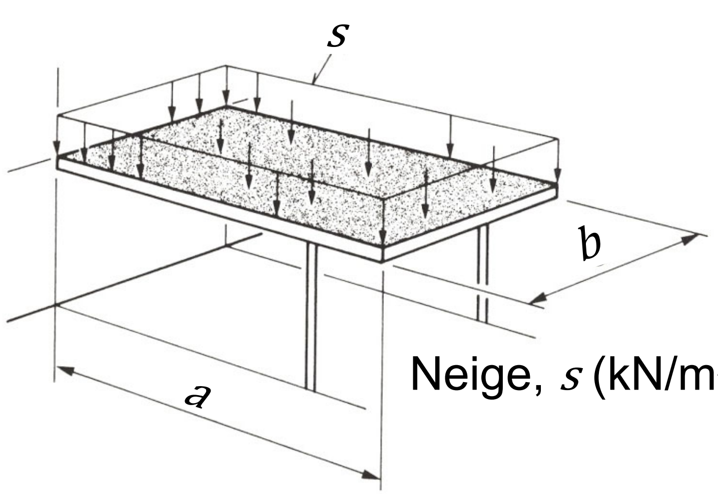
- **Forces concentrées**
- **Forces réparties**

  - force linéaire, en kN/m

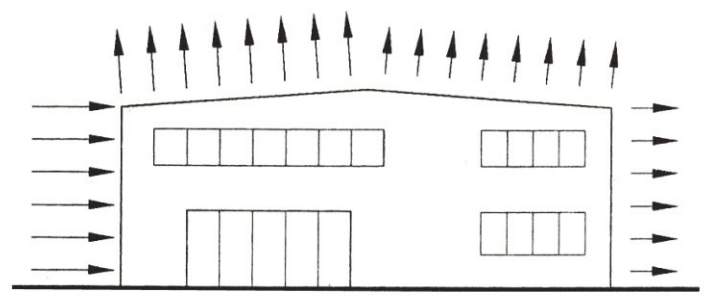


Poids mur,
$q = P/L$ (kN/m)

  - force surfacique, en kN/m^2 (neige, vent, pression d'eau ou des terres)



Neige, s (kN/m^2)



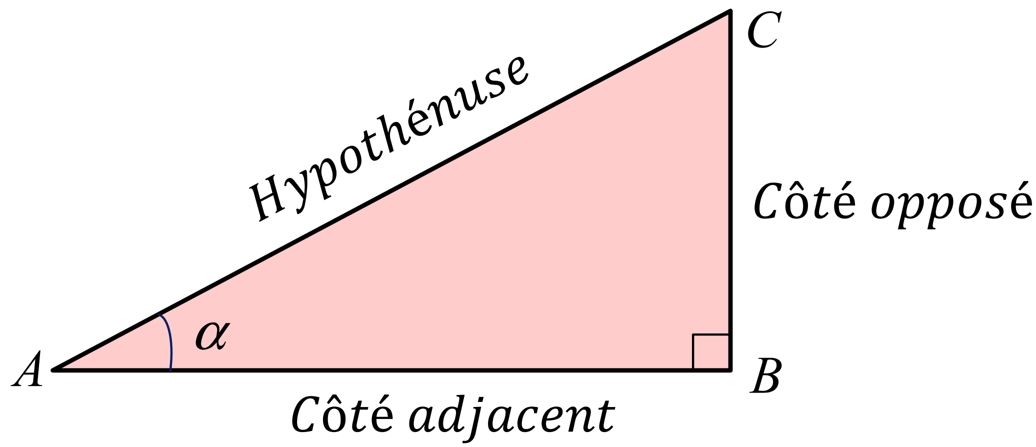
Vent,
q (kN/m^2)

  - charge volumique, en kN/m^3

Acier	ρ = 7850 kg/m^3	γ = 78.5 kN/m^3
Aluminium	2700	27
Béton armé	2500	25
Bois résineux	500	5

Force : Composantes

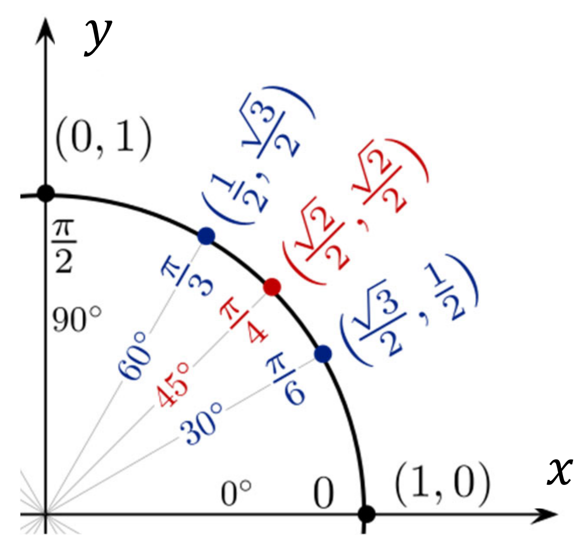
Rappels de trigonométrie



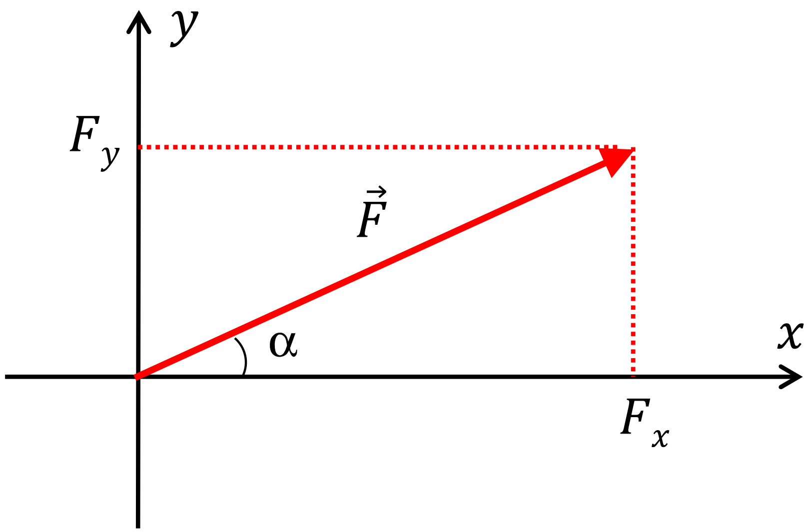
$$\sin(\alpha) = \frac{Côté\ opposé}{Hypothénuse} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Côté\ adjacent}{Hypothénuse} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{Côté\ opposé}{Côté\ adjacent} = \frac{BC}{AB}$$

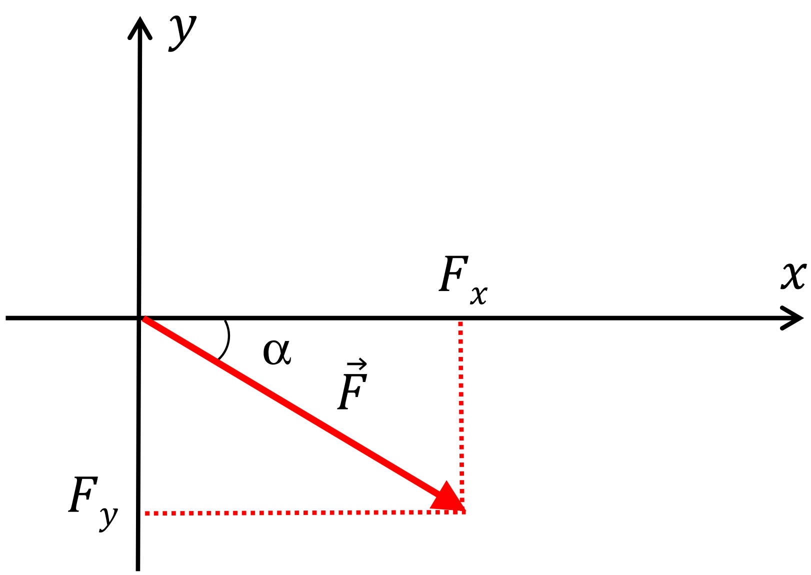


Force : Composantes



$$\begin{cases} F_x = F \cdot \cos(\alpha) = \left\|\vec{F}\right\| \cdot \cos(\alpha) \\ F_y = F \cdot \sin(\alpha) = \left\|\vec{F}\right\| \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$



$$\begin{cases} F_x = F \cdot \cos(\alpha) = \left\|\vec{F}\right\| \cdot \cos(\alpha) \\ F_y = -F \cdot \sin(\alpha) = -\left\|\vec{F}\right\| \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Force : Addition

Méthode graphique

- Méthode de résolution purement graphique
- Précision pour le tracé
- Forces coplanaires

Méthode analytique

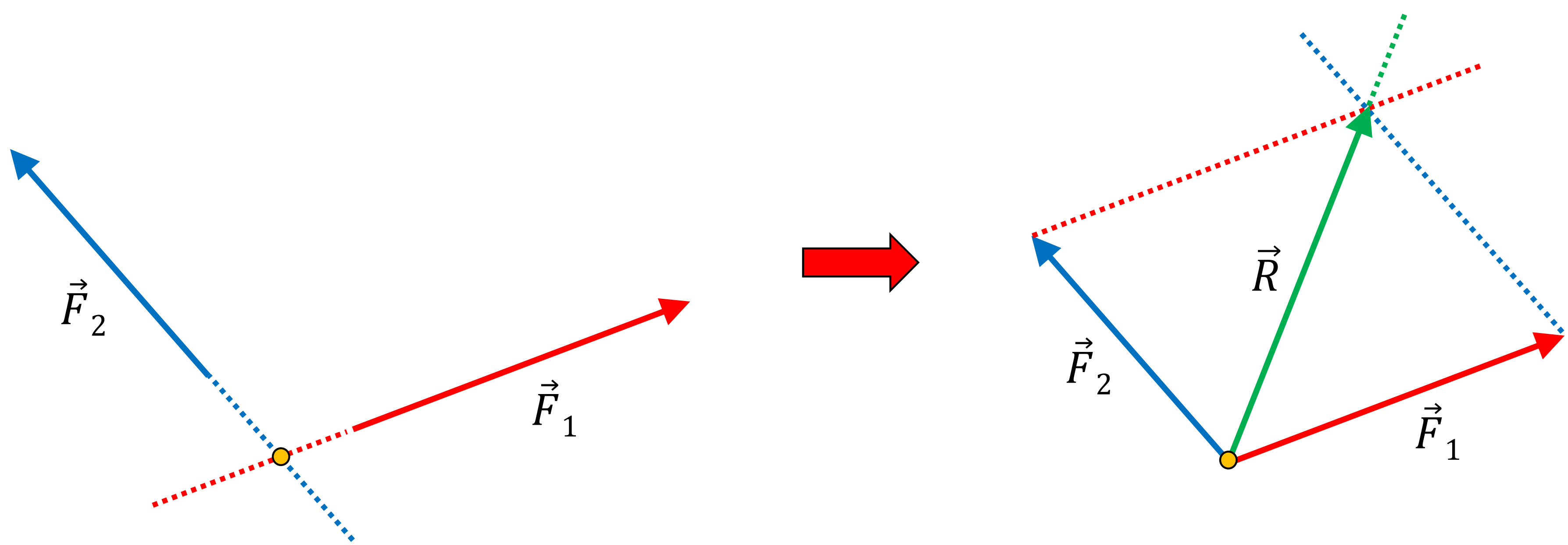
- Projeter des vecteurs
- Additionner les composantes
- Forces quelconques

- **Addition de deux forces**
- Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes
- Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Addition de deux forces : Méthode graphique

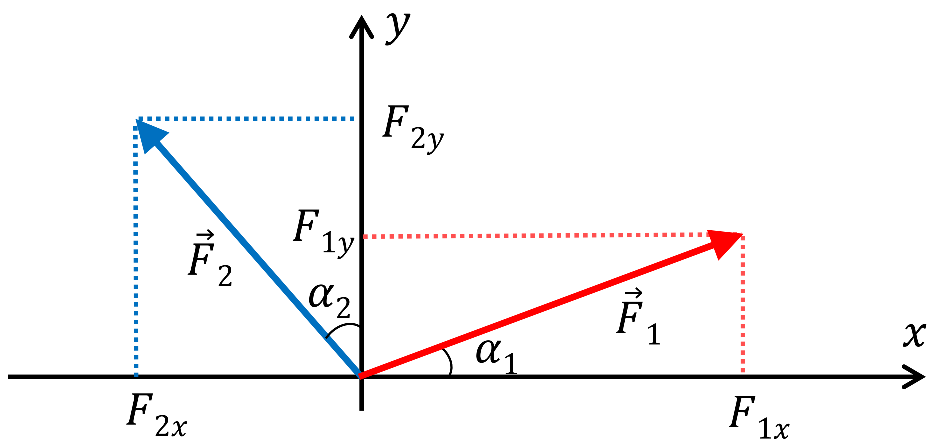
Afin d'additionner deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, on utilise la règle du parallélogramme :

- Rechercher l'intersection des lignes d'actions des deux forces
- Déplacer les forces vers le point d'intersection
- Tirer des parallèles aux lignes d'actions depuis l'extrémités des forces
- Relier le point d'intersection des forces à l'intersection des parallèles des forces



Addition de deux forces : Méthode analytique

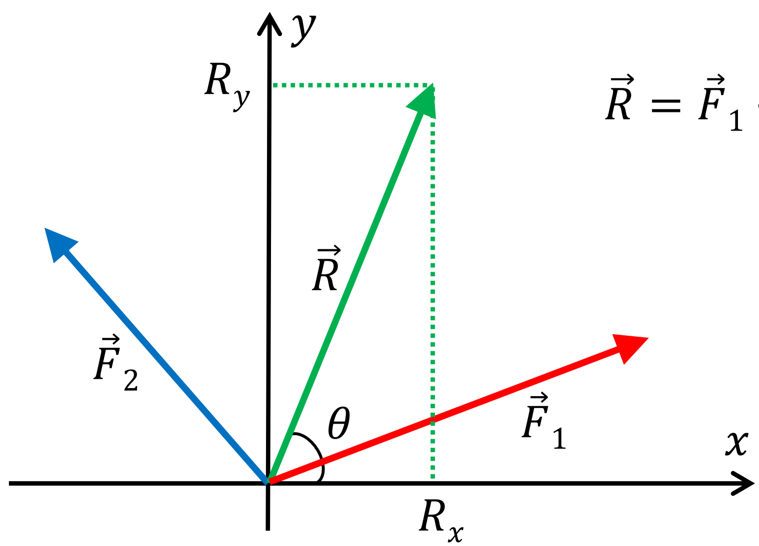
Décomposer chaque force $\vec{F}$ selon ses composantes F_x et F_y



$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) \\ F_{1y} = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{2x} = -F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \\ F_{2y} = F_2 \cdot \cos(\alpha_2) \end{cases}$$

Additionner les composantes pour obtenir R_x et R_y



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) - F_2 \cdot \sin(\alpha_2) \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) + F_2 \cdot \cos(\alpha_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \|\vec{R}\| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \end{aligned}}$$

Composer la résultante $\vec{R}$ à partir de ses composantes R_x et R_y

Force : Addition

Méthode graphique

- Méthode de résolution purement graphique
- Précision pour le tracé
- Forces coplanaires

Méthode analytique

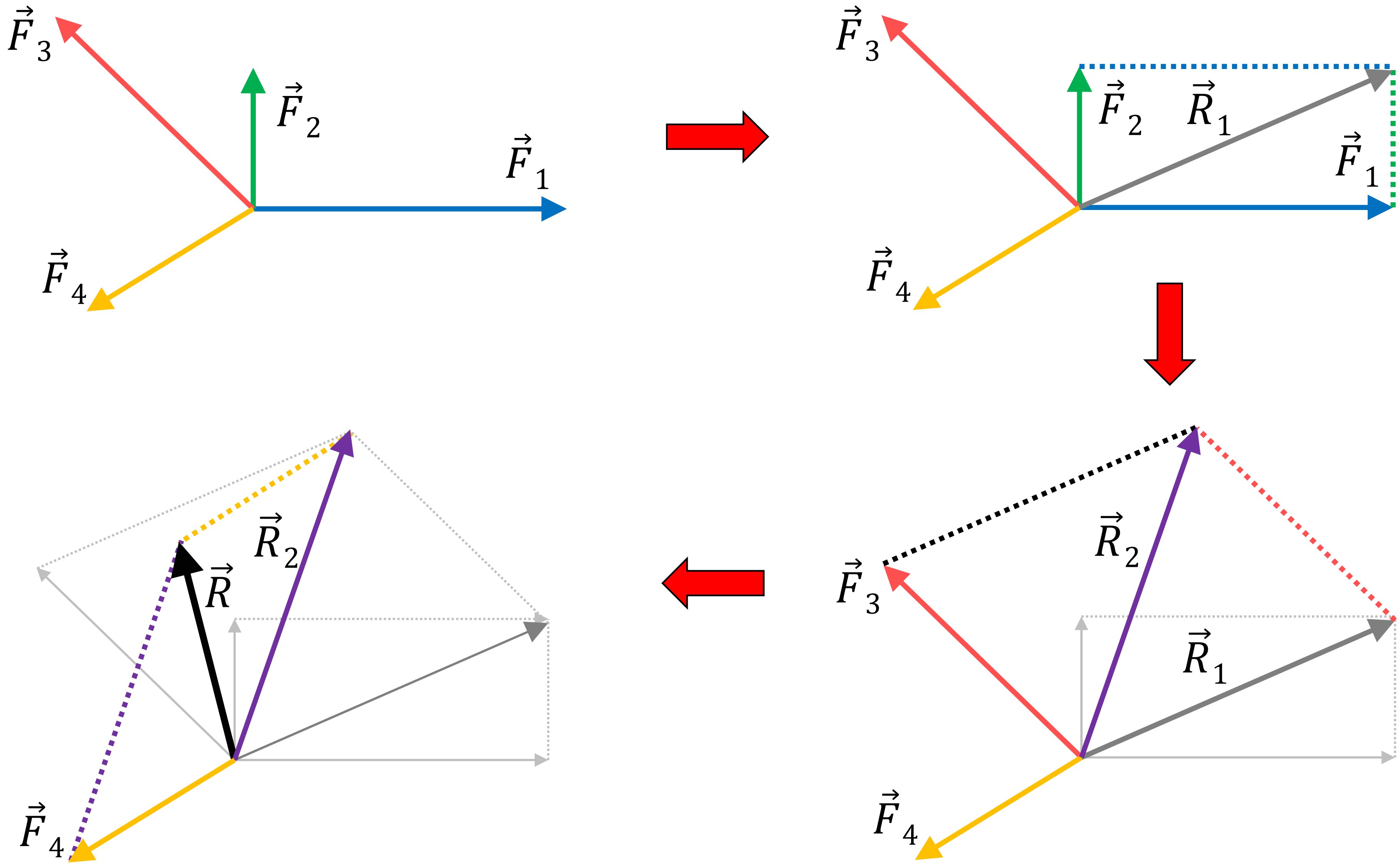
- Projeter des vecteurs
- Additionner les composantes
- Forces quelconques

- Addition de deux forces
- **Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes**
- Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes

Méthode graphique

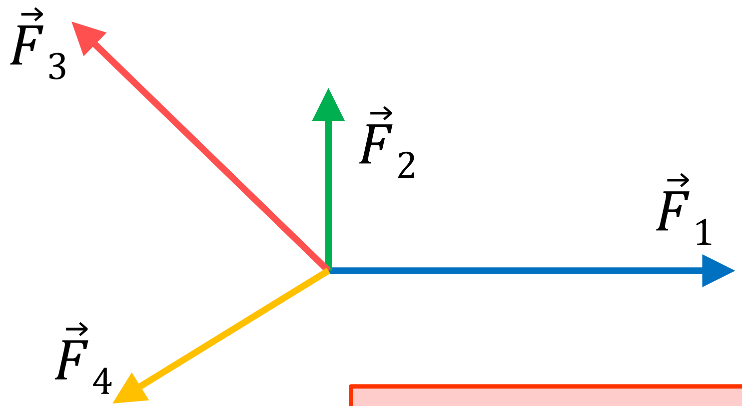
1ère possibilité : méthode des parallélogrammes successifs

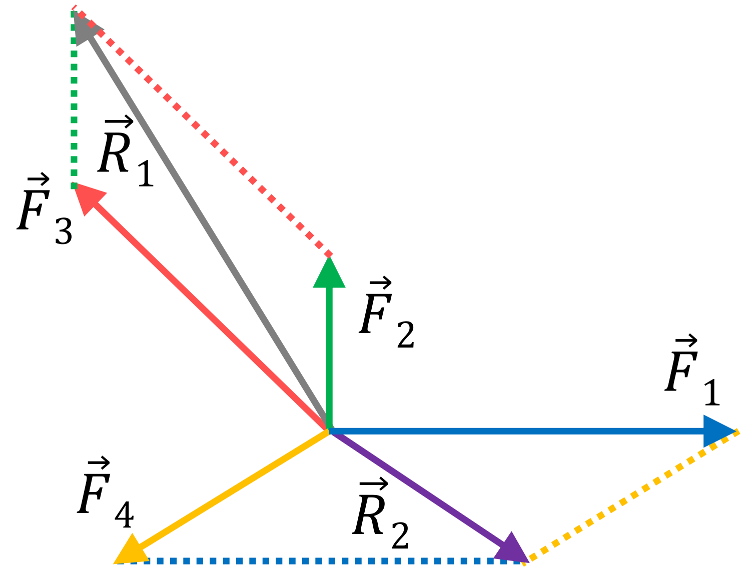


Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes

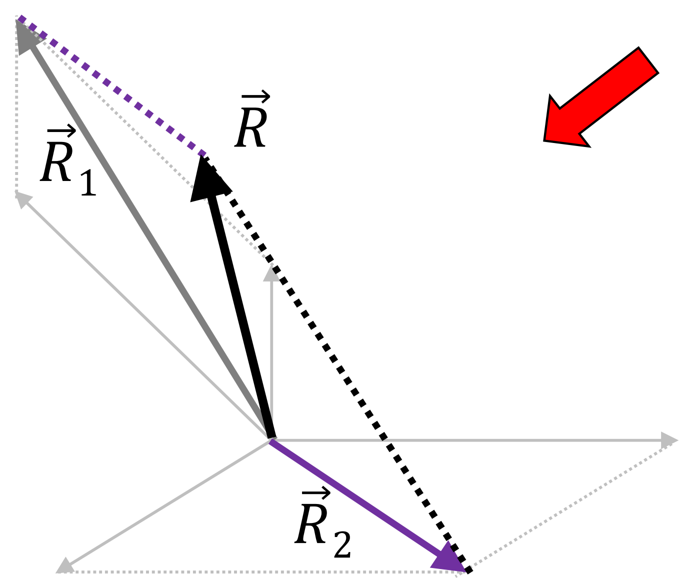
Méthode graphique

1[ère] possibilité : méthode des parallélogrammes successifs





L'ordre des différentes forces n'a aucune importance



Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes

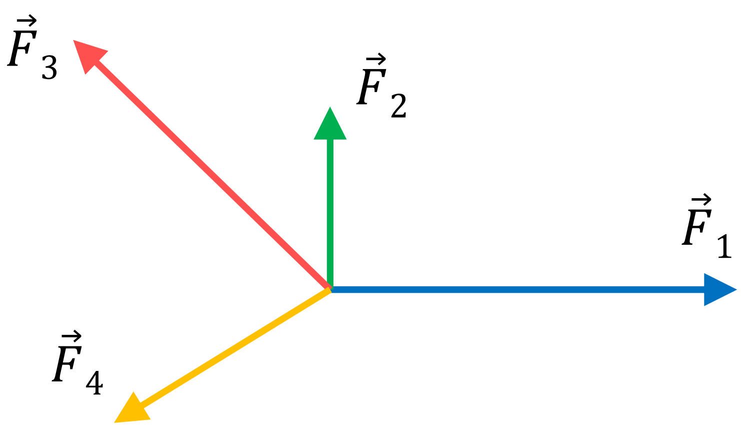
Méthode graphique

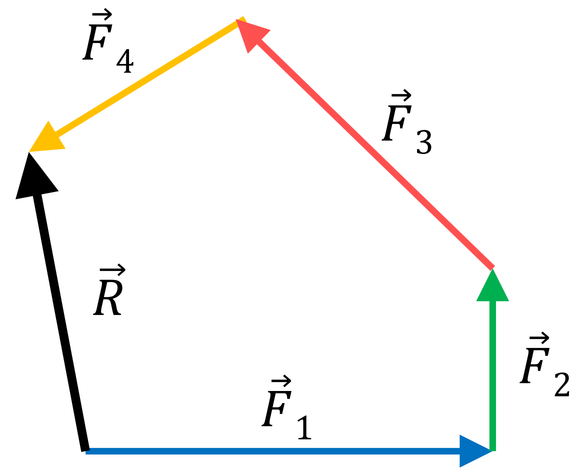
2ème possibilité : méthode du polygone des forces

- Reporter les forces «bout à bout»
- Relier l'origine de la première force avec l'extrémité de la dernière force

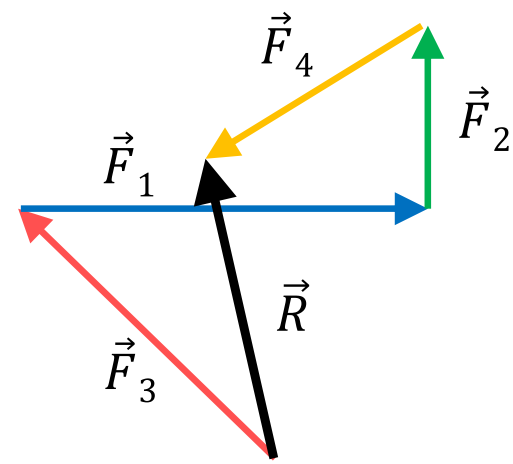
Il est nécessaire que les lignes de forces conservent :

- Direction
- Sens
- Intensité réelle





OU

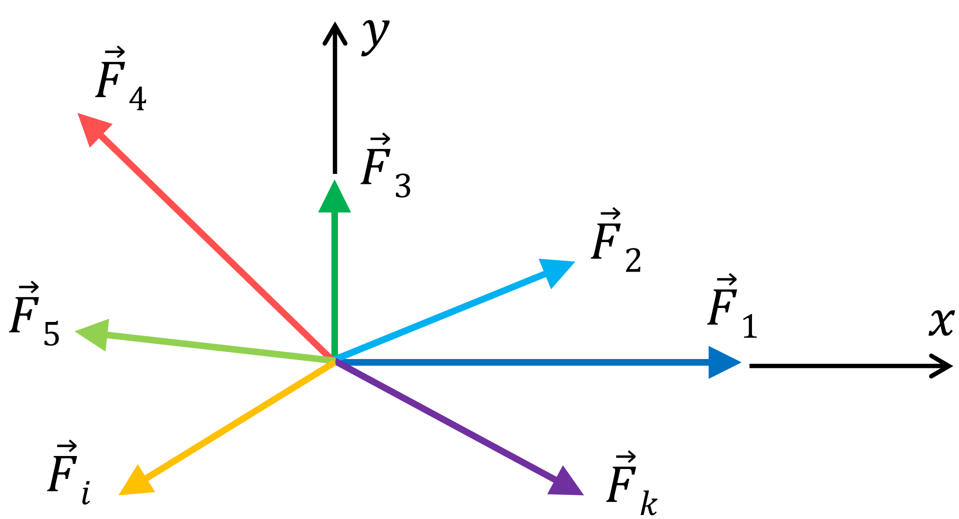


Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes

Méthode analytique

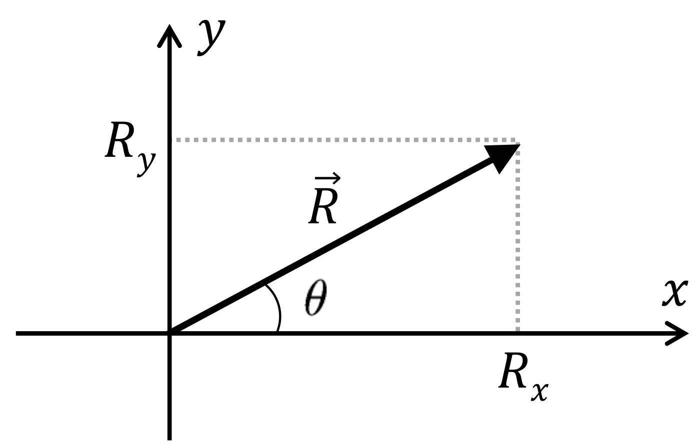
Même principe que pour le cas de deux forces :

- Décomposer chaque force selon ses composantes
- Additionner les composantes



Résultante $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{kx} \\ R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ky} \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{gathered} \|\vec{R}\| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \end{gathered}}$$

Force : Addition

Méthode graphique

- Méthode de résolution purement graphique
- Précision pour le tracé
- Forces coplanaires

Méthode analytique

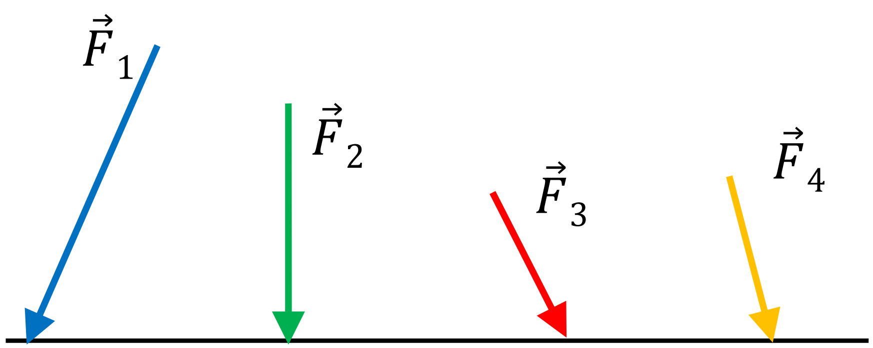
- Projeter des vecteurs
- Additionner les composantes
- Forces quelconques

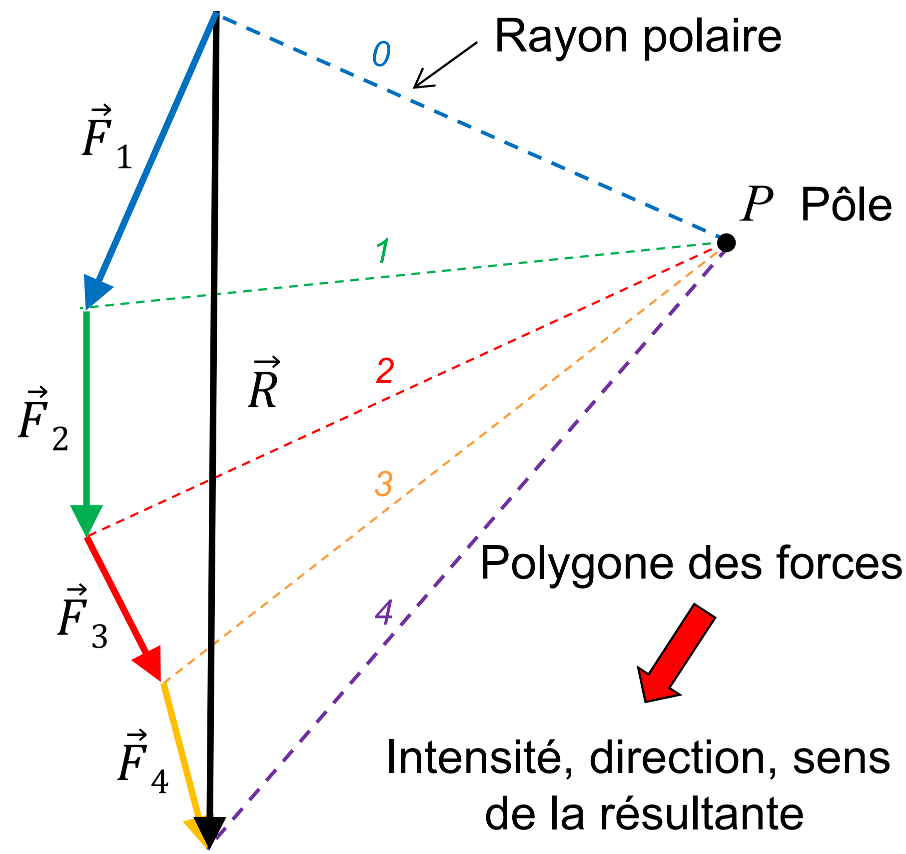
- Addition de deux forces
- Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes
- **Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes**

Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Méthode graphique : Tracé du funiculaire

- Construire le polygone des forces
- Choisir un point *P* (Pôle) quelconque et relier *P* aux extrémités des vecteurs du polygone des forces pour créer des rayons polaires.



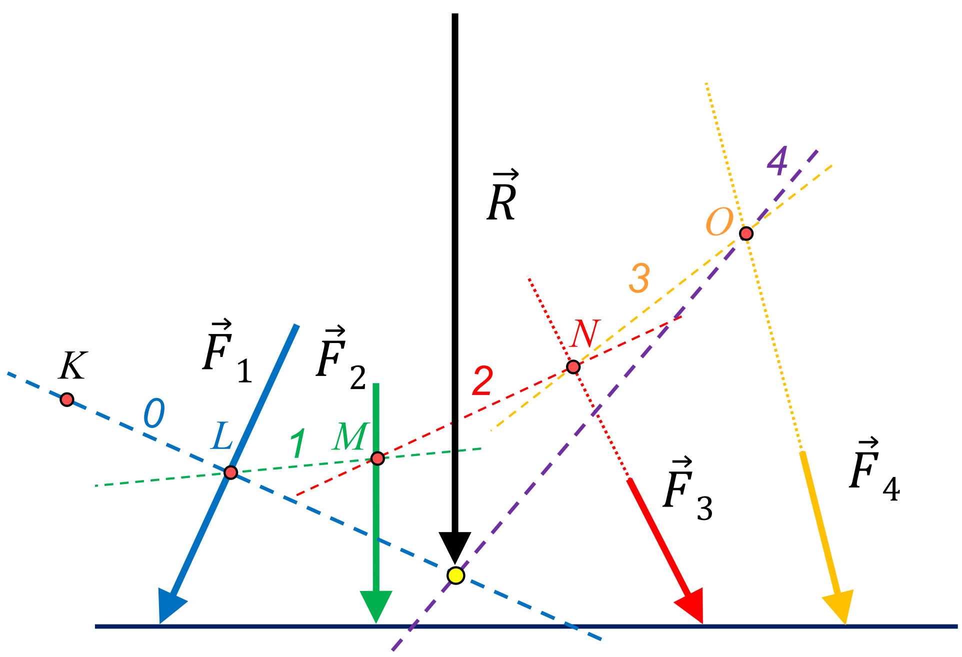


Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Méthode graphique : Tracé du funiculaire

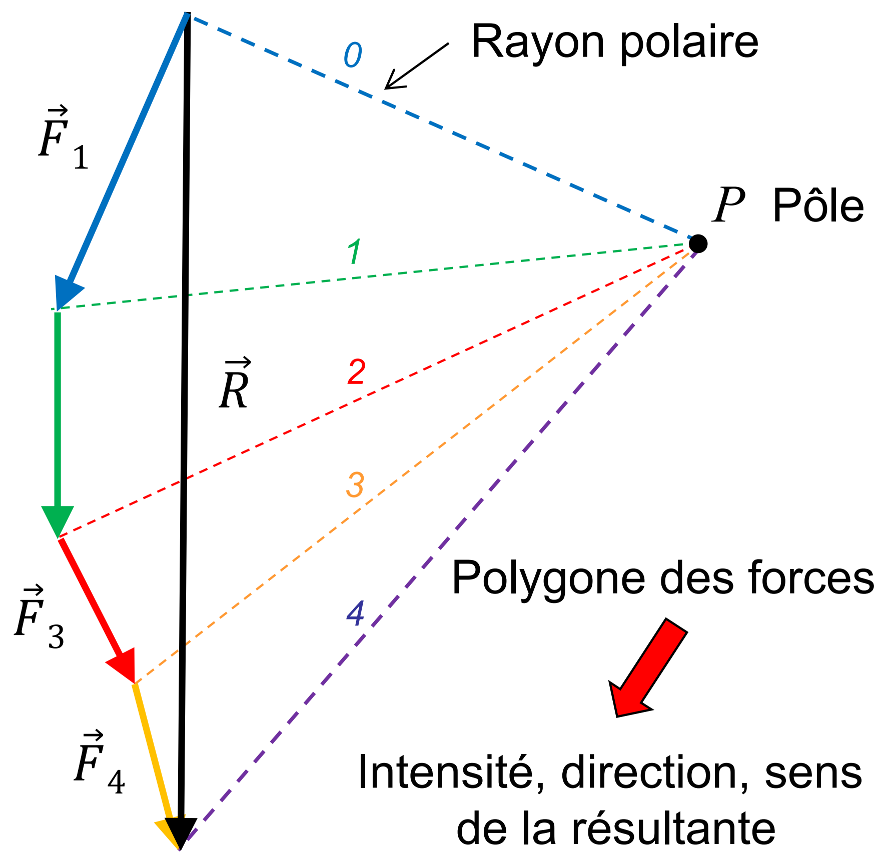
A partir d'un point *K* quelconque

- Tracer une parallèle au rayon polaire *0* qui coupe le support de la première force F_1 en *L*.
- A partir de *L*, tracer une parallèle au rayon polaire *1* qui coupe le support de la deuxième force F_2 en *M* et recommencer ainsi de suite …
- La position de la résultante est obtenue en traçant des parallèles aux rayons polaires *0* et *4*, qui ferment le polygone de force, passant par *K* et *O* (point d'intersection).



KLMNO: funiculaire relatif au pôle *P* à l'origine *K*

Point d'action de la résultante



Plan du chapitre

Forces

- Définition, caractérisation
- Composantes d'une force
- Addition d'un système de force
  - Addition de deux forces
  - Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes
  - Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Moments

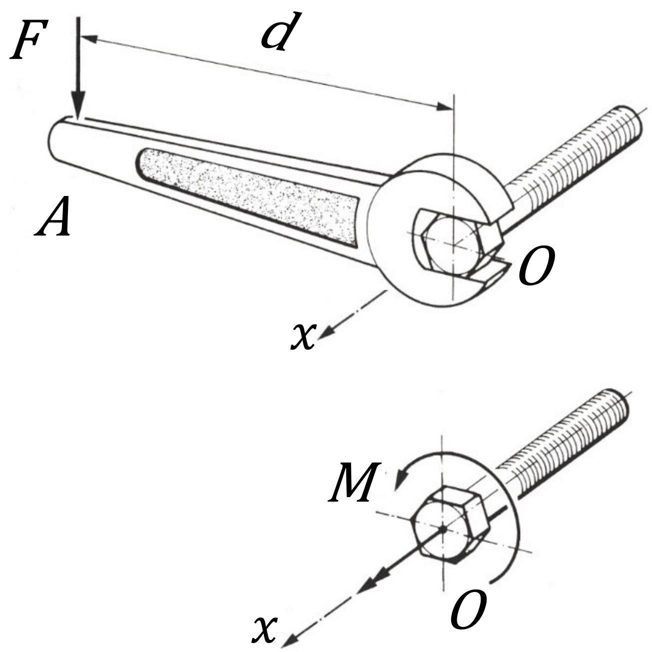
- Définition, caractérisation
- Moment d'une force
- Moment d'un couple de forces

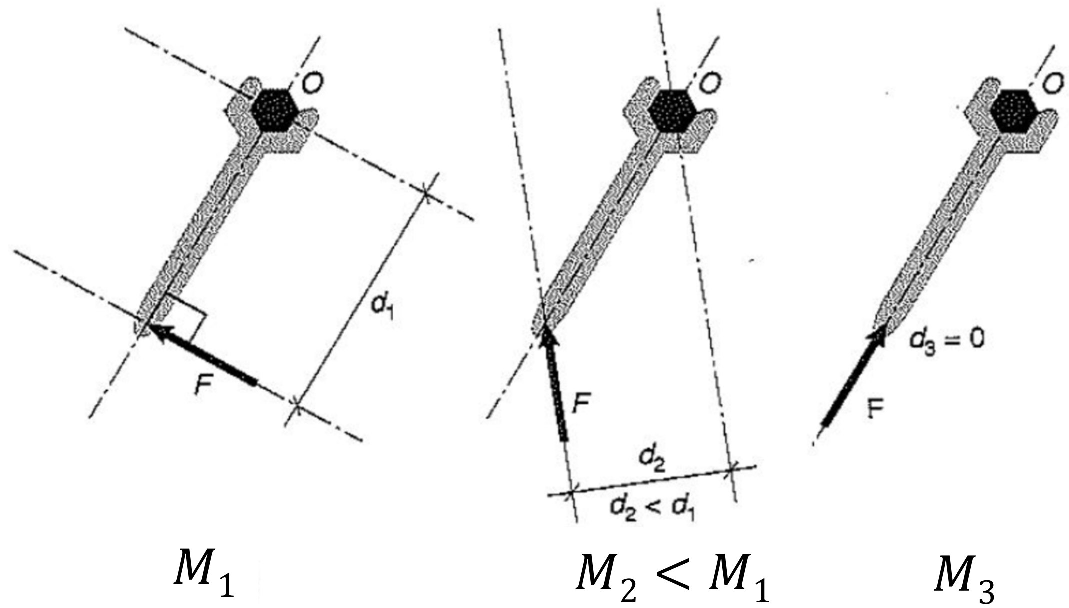
Eléments de réduction d'un système de forces

- Réduction d'un système de forces parallèles
- Réduction d'une force répartie

Moment : Définition, caractérisation

Une force qui a tendance à faire tourner un objet autour d'un axe produit un moment autour de cet axe.





Le moment d'une force autour d'un point est proportionnel à la distance de la ligne d'action à ce point.

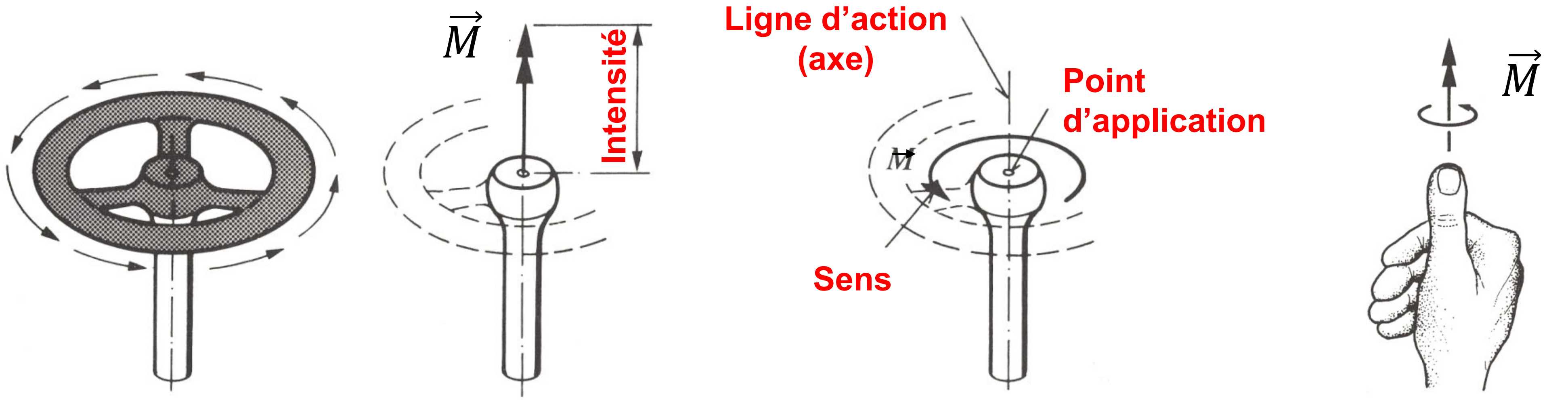
Force ⟷ Mouvement de translation

Moment ⟷ Mouvement de rotation autour d'un axe

Moment : Définition, caractérisation

Caractérisation

- Point d'application
- Ligne d'action / support (direction)
- Sens
- Intensité (Nm : N · m : Newton x mètre)



Vecteur moment

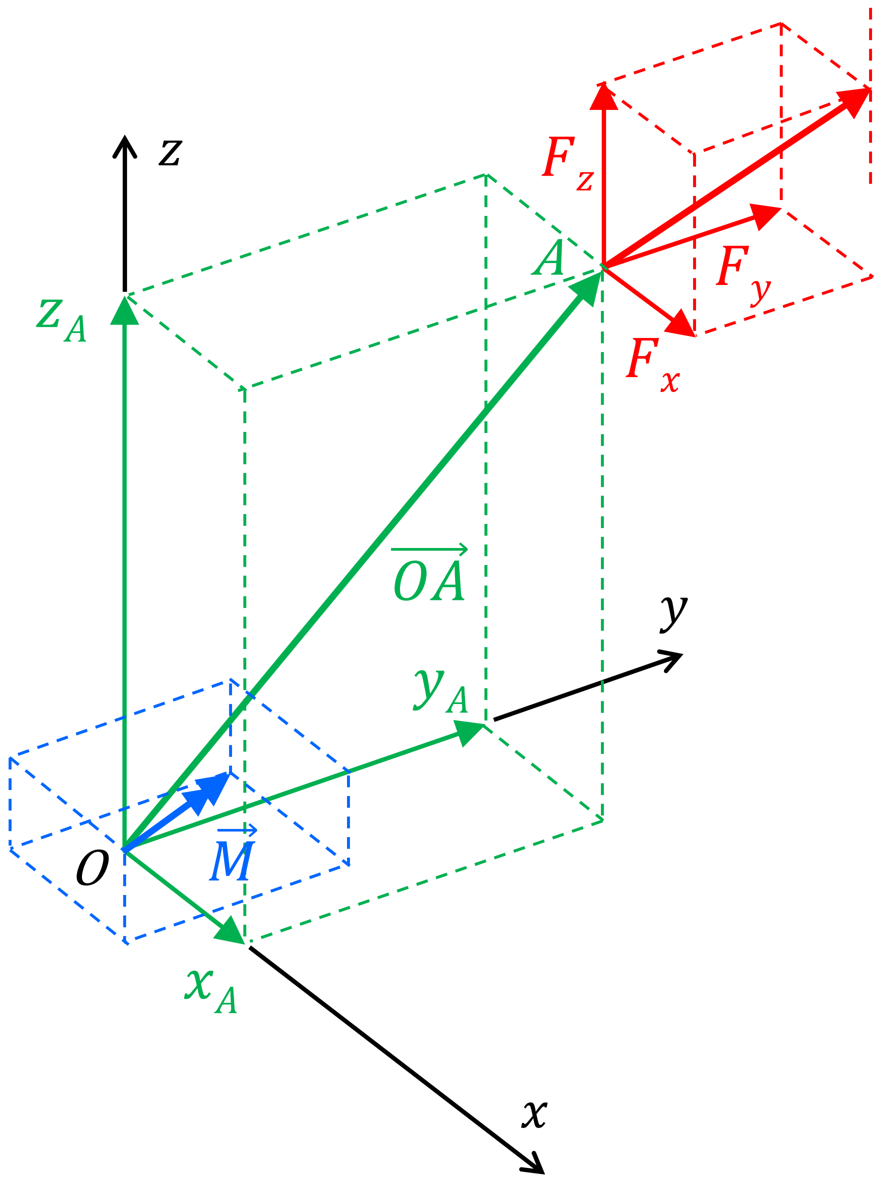
Flèche tournante

Sens d'action
du moment

Le **moment** est considéré comme **positif** quand il a tendance à faire tourner le solide sur lequel il agit dans le **sens trigonométrique**.

Moment d'une force

Par rapport à un point de l'espace



Le moment d'une force par rapport à un point O est le produit vectoriel

$$\vec{M}_{/O}\vec{F} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y \\ z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z \\ x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

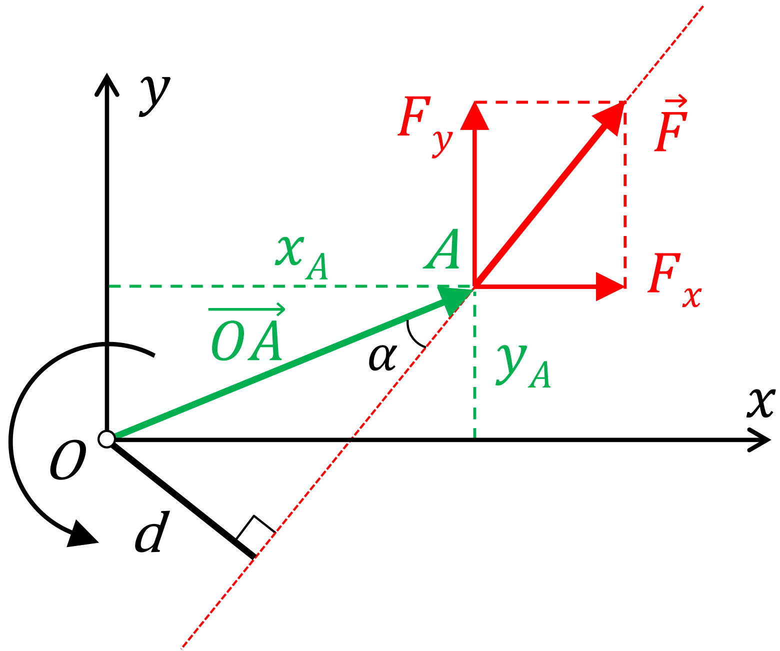
Intensité du moment :

$$M = \|\vec{M}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin(\alpha)$$

avec α : angle entre $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$

Moment d'une force

Dans le plan



ligne d'action

Dans le plan, la force $\vec{F}$ provoque un moment par rapport à l'axe z uniquement (semblablement du point O) de composante :

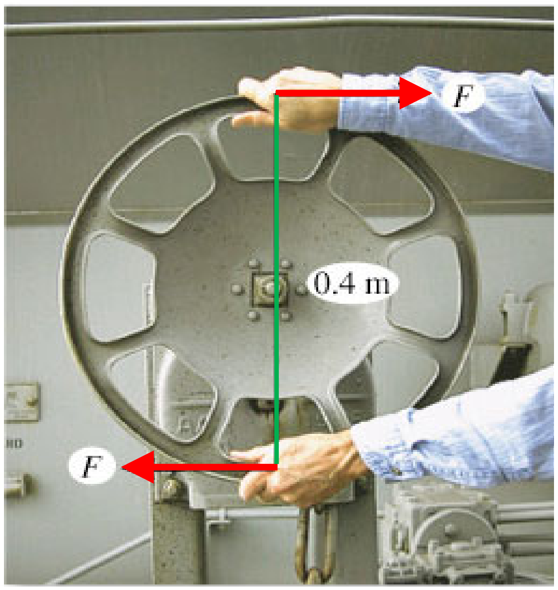
$$M_z = M = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x = \pm F \cdot d$$

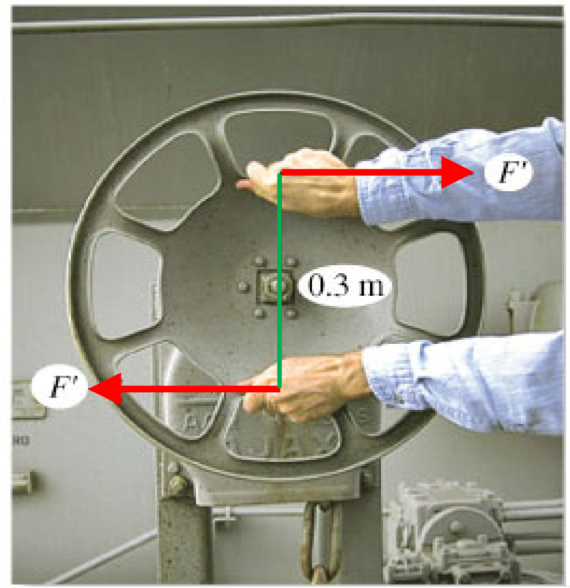
d : bras de levier de $\vec{F}$ par rapport à O, la plus courte distance de O à la ligne d'action de $\vec{F}$ (positive).

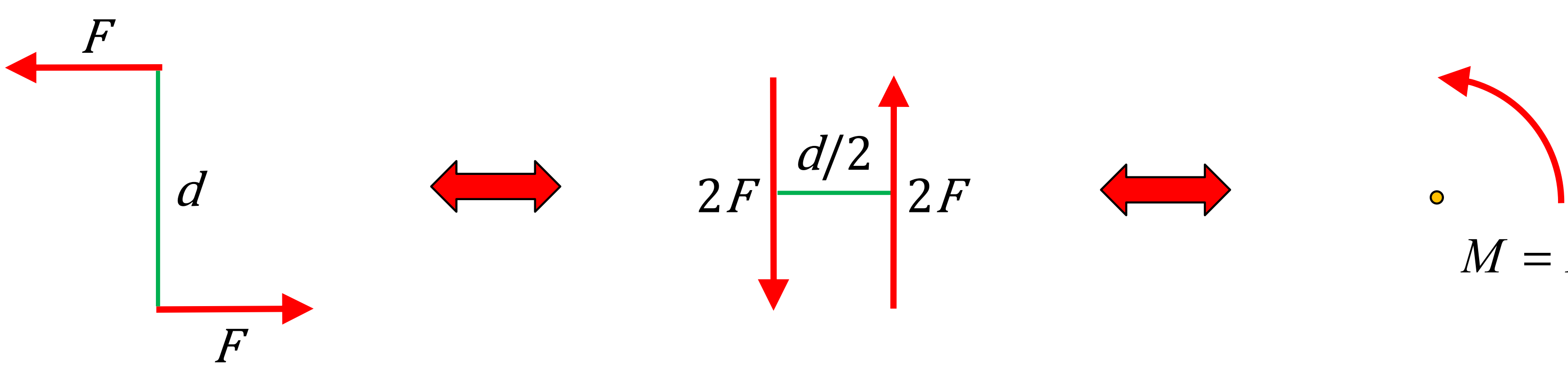
Le signe du moment est choisi par la règle du pouce de la main droite selon le sens de rotation que $\vec{F}$ tend à donner autour de O.

Moment d'un couple de forces

Ensemble de deux forces d'intensité égale, de supports parallèles (même direction) mais de sens opposés. Leur distance *d* est le bras de levier.







$$M = F \cdot d$$

Plan du chapitre

Forces

- Définition, caractérisation
- Composantes d'une force
- Addition d'un système de force
  - Addition de deux forces
  - Addition d'un système de forces coplanaires et concourantes
  - Addition d'un système de forces coplanaires non concourantes

Moments

- Définition, caractérisation
- Moment d'une force
- Moment d'un couple de forces

Eléments de réduction d'un système de forces

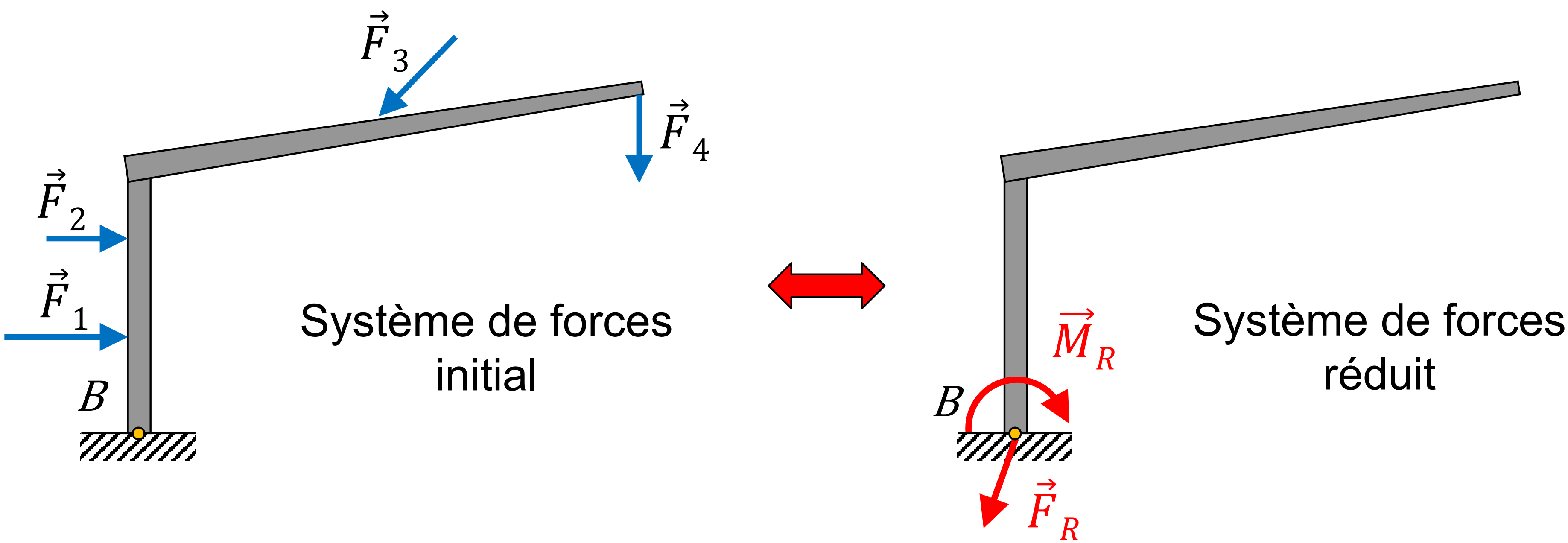
- Réduction d'un système de forces parallèles
- Réduction d'une force répartie

Réduction d'un système de forces

- Remplacer un système de force par un autre statiquement équivalent
- Du point de vue statique, les deux systèmes ont le même effet global sur le solide

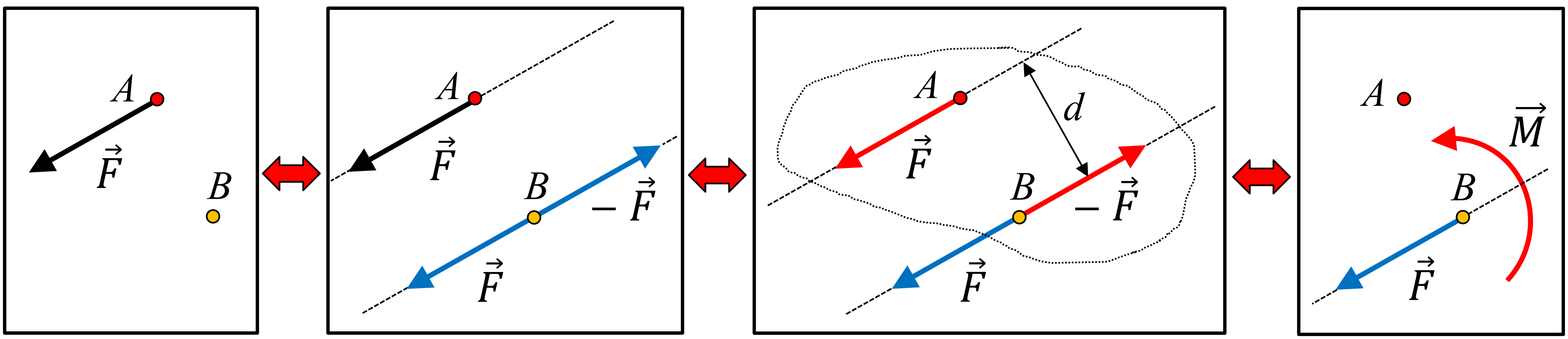
Réduire des forces et moments $\neq$ **Déplacer les forces et moments**

Imaginer un système de forces qui a le même effet statique pour faciliter les calculs ultérieurs.



Réduction d'une force

Une force appliquée en un point A est équivalente à une force de même direction, sens et intensité, appliquée en un autre point quelconque B accompagnée du moment de la force par rapport à ce point.



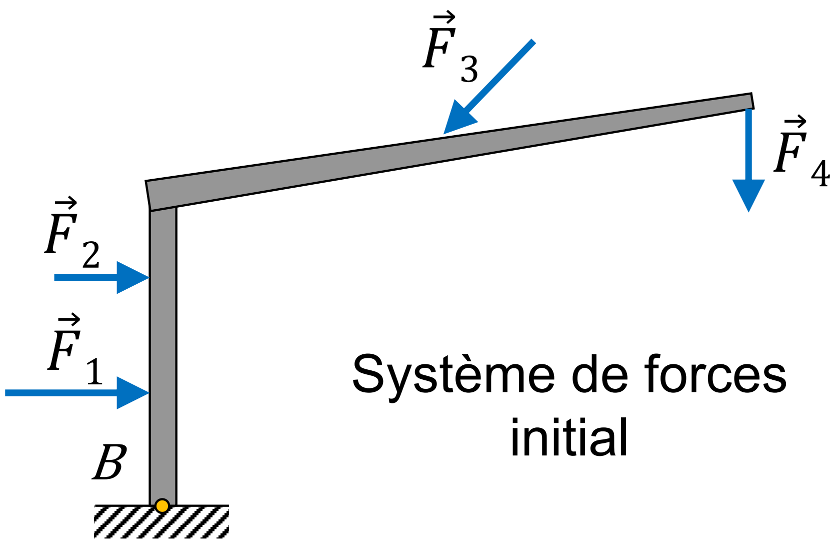
$$\vec{M} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

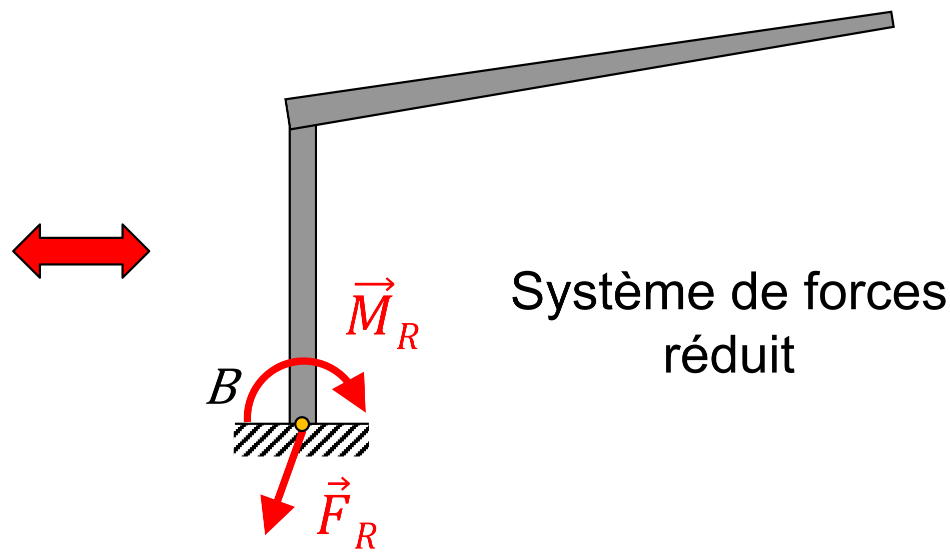
Réduction d'un système de forces

Un système de forces $\vec{F}_i$ peut se réduire en un point quelconque B à :

- une unique force : force résultante $\vec{F}_R$
- un unique moment : moment résultant $\overrightarrow{M}_R$

$$\begin{cases} \vec{F}_R = \sum \vec{F}_i \\ \overrightarrow{M}_R = \sum \overrightarrow{M}_i \end{cases}$$





Réduction d'un système de forces parallèles

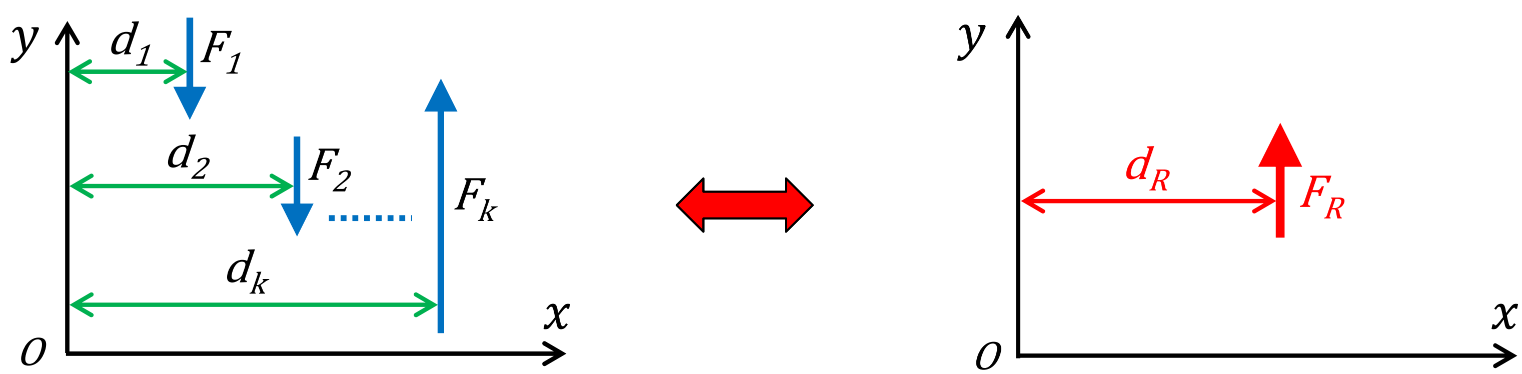
Les systèmes de forces parallèles sont très courants en génie civil :
ils correspondent au poids propre des diverses parties d'une construction

Théorème de Varignon :

Le moment de la résultante d'un système plan de forces est égal à la somme algébrique :

- des moments de l'ensemble des forces du système
- des couples du système

Permet de positionner le support de la force résultante (d_R)



$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = 0$$

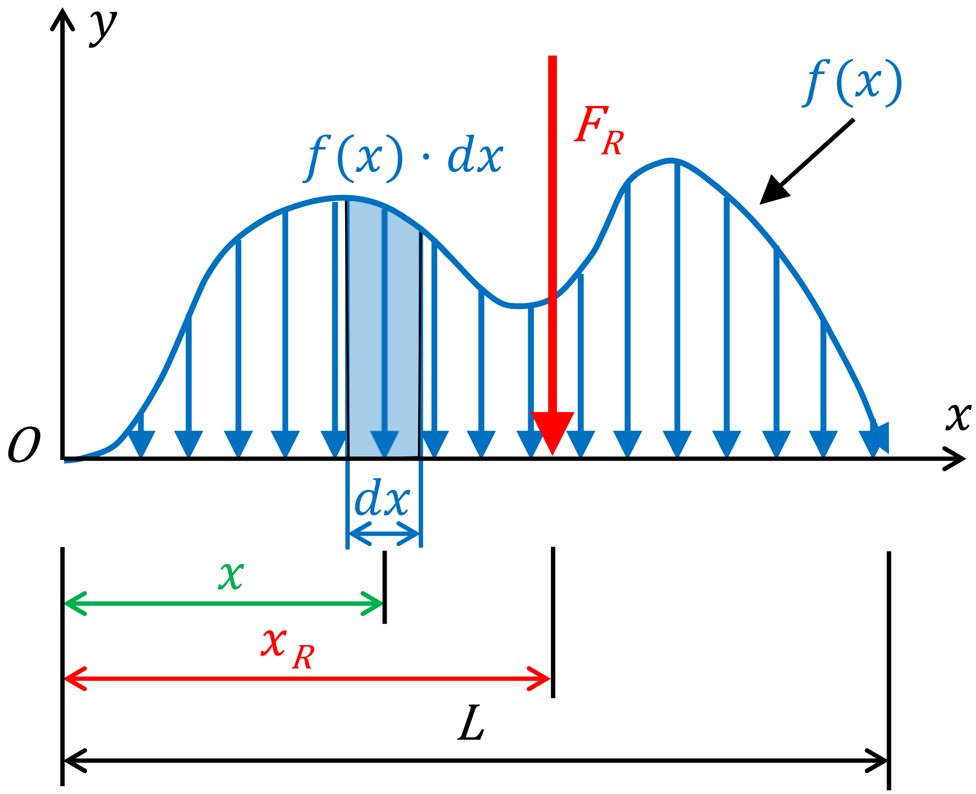
$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = -F_1 - F_2 + \ldots + F_k$$

$$M_R = \sum F_i \cdot d_i = -F_1 \cdot d_1 - F_2 \cdot d_2 + \cdots + F_k \cdot d_k$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = F_{Ry}$$

$$d_R = \frac{M_R}{F_R}$$

Réduction d'un système de forces réparties



$$F_R = \int_0^L f(x) \cdot dx$$: Surface sous la courbe

Moment dû à la résultante
=
Moment dû à la force répartie

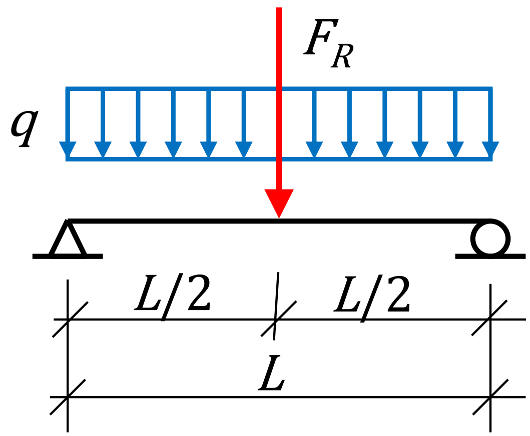
$$x_R \cdot \int_0^L f(x) \cdot dx = \int_0^L x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$x_R = \frac{\int_0^L x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_0^L f(x) \cdot dx}$$

En pratique, la résultante qui remplacera la charge répartie est placée au centre de gravité de la zone répartie et a pour valeur la surface de la zone.

Réduction d'un système de forces réparties

Forces uniformes



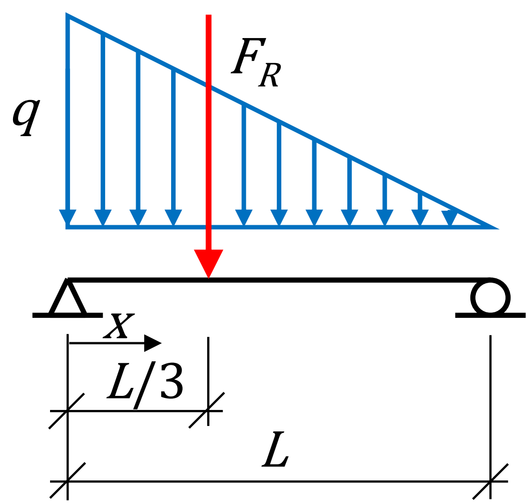
q : constante [kN/m]

$$F_R = q \cdot L$$

$$d_R = \frac{L}{2}$$

Résultante = intégrale de la charge uniforme sur la longueur

Forces linéaires



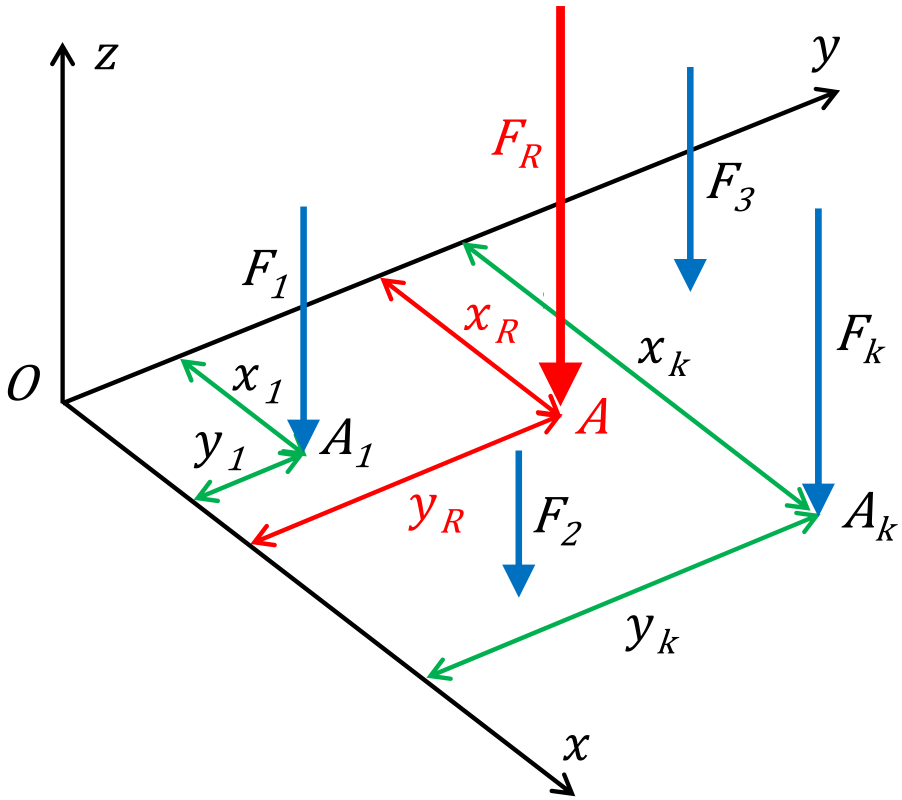
$$q(x) = q \cdot \frac{(L - x)}{L}$$ [kN/m]

$$F_R = q \cdot \frac{L}{2}$$

$$d_R = \frac{L}{3}$$

Résultante = intégrale de la charge linéaire sur la longueur

Réduction d'un système de forces parallèles dans l'espace



$$\vec{M}_R = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_R = \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i$$

$$\boxed{x_R = \frac{\sum (F_i \cdot x_i)}{F_R}}$$

$$\boxed{y_R = \frac{\sum (F_i \cdot y_i)}{F_R}}$$

On utilise le **théorème de Varignon** :

Le moment de la résultante par rapport à un point *O* est égal à la somme des moments des différentes forces et couples.

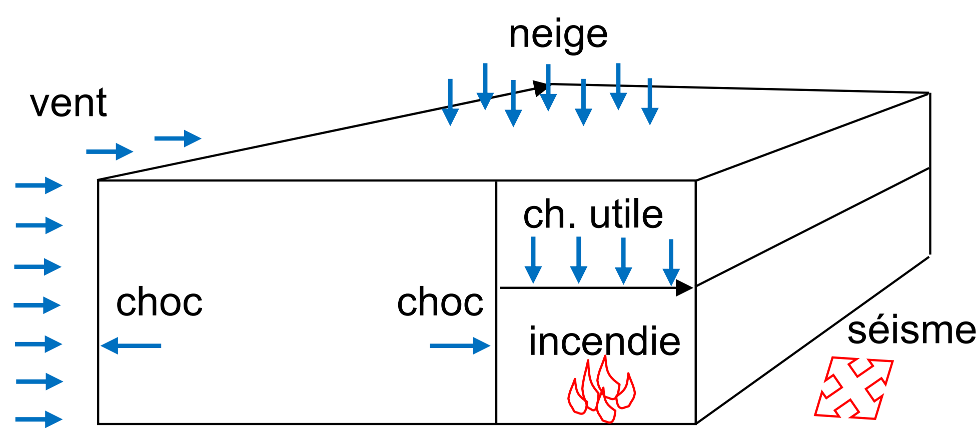
Forces agissant sur une construction

Types de forces sollicitant une construction :

- Cause : la gravité ⇨ charges (verticales)
- Autres causes ⇨ forces (principalement horizontales)

Charges : - poids propre du système porteur
- poids propre des éléments non porteur (revêtement, isolation, etc.)
- charges utiles dans le bâtiment (personnes, mobilier, marchandise, etc.)
- charges de neige

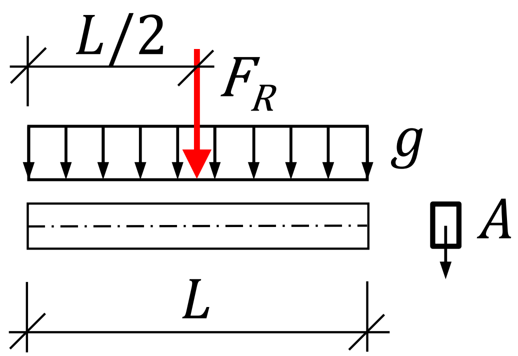
Forces : - force du vent
- poussée des terres
- choc
- séisme



Forces agissant sur une construction

Poids propre de la structure porteuse

- d'une poutre (élément linéaire, 1D)



$g = A \cdot \gamma$ [kN/m]

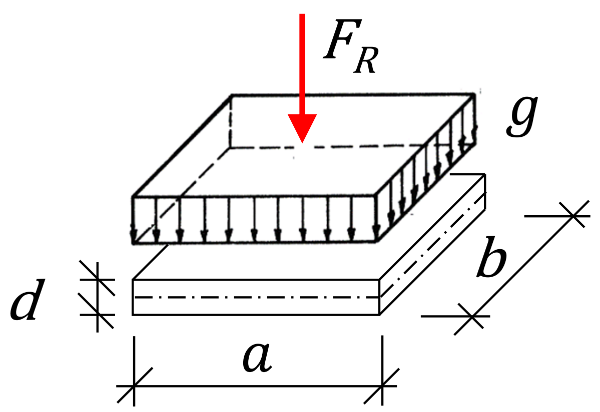
avec A : aire de la section [m^2]

γ : poids volumique [kN/m^3]

$F_R = g \cdot L$ [kN]

ex : poutre en béton armé de section 20x40 cm
g = 0.2·0.4·25 = 2 kN/m

- d'une dalle (élément mince, 2D)



$g = d \cdot \gamma$ [kN/m^2]

avec d : épaisseur de la dalle [m]

γ : poids volumique [kN/m^3]

$F_R = g \cdot a \cdot b$ [kN]

ex : dalle en béton armé de 30 cm d'épaisseur
g= 0.3·25 = 7.5 kN/m^2

Charges utiles dans le bâtiment (Extrait SIA 261)

Catégorie	Genre de surface utile	Exemples	q_k en kN/m^2	Q_k en kN
A	Surfaces d'habitation	A1: Locaux dans les immeubles et les maisons d'habitation, services des hôpitaux, chambres d'hôtel, cuisines et toilettes	2	2 [1)]
		A2: Balcons	3	2 [1)]
		A3: Escaliers	4	2 [1)]
B	Bureaux		3	2 [1)]
C	Locaux de réunion	C1: Surfaces avec tables et chaises	3	4 [1)]
		C2: Surfaces avec sièges fixes	4	4 [1)]
		C3: Surfaces librement accessibles, surfaces de sport et de jeu, surfaces pouvant acceuillir des rassemblements de personnes	5	4 [1)]
D	Surfaces de vente	Grands magasins, commerces	5	4 [1)]
E	Surfaces d'entreposage et de fabrication	Entrepôts, bibliothèques et leurs accès, halles de fabrication	[2) 3)]	[2) 3)]
F	Surfaces de stationnement et surfaces accessibles aux véhicules de poids < 3,5 t	Parkings à étages, surfaces de parc, garages	2 [3)]	20 [3) 4)]
G	Surfaces de stationnement et surfaces accessibles aux véhicules de 3,5 t à 16 t	Rampes d'accès, zones de livraison, zones accessibles aux véhicules du service du feu	5 [3)]	90 [3) 4)]
H	Toitures non accessibles [5)]	Toits uniquement accessibles pour des travaux d'entretien	0,4	1 [1)]