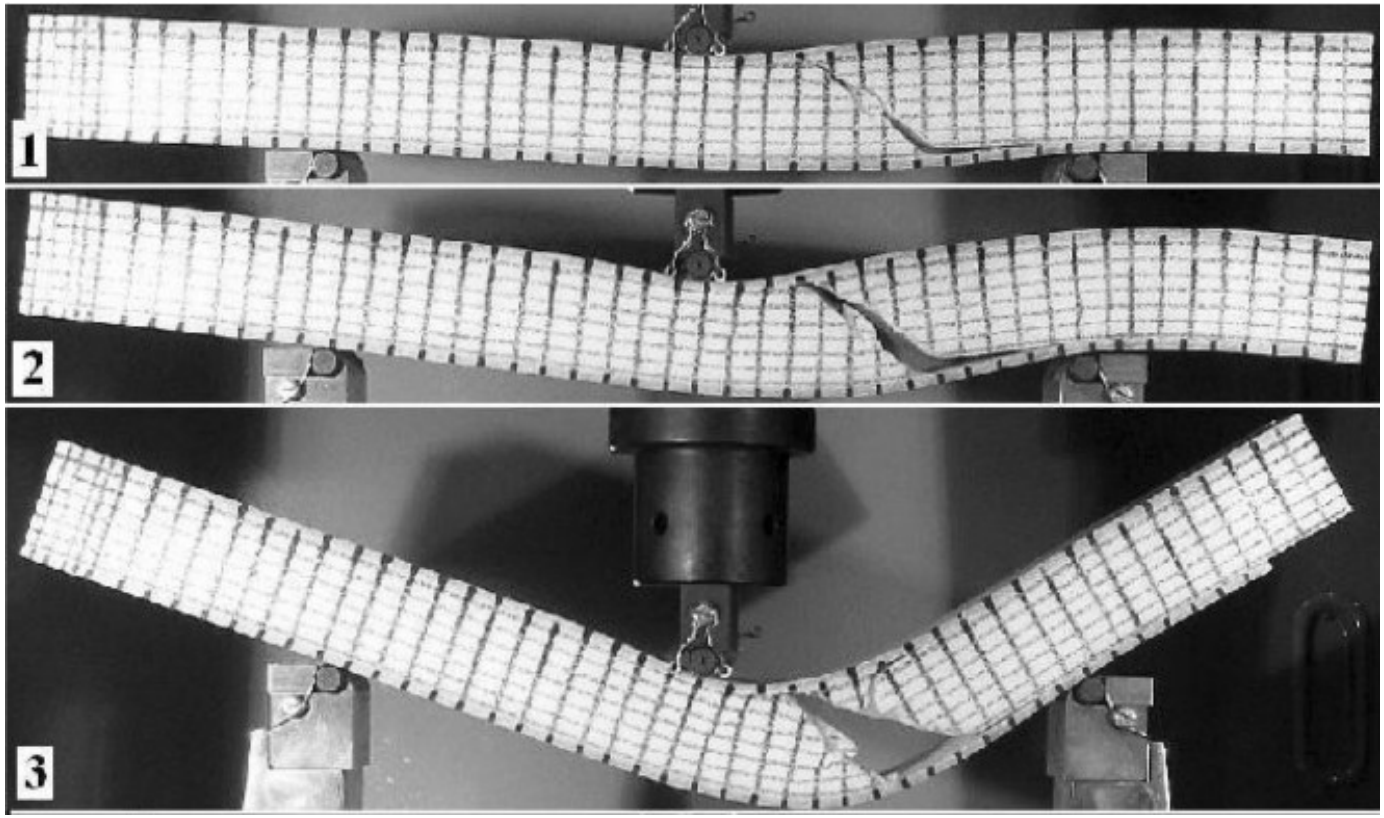
TB_SRM2 : Structure et résistance des matériaux 2

Chapitre 7. Cisaillement



Rupture par cisaillement d'un panneau sandwich en composites, Mamalis et al. 2008, DOI:10.1080/135

Archi Legno

ECHELLE GLOBALE

Modéliser le problème à résoudre :

- Identifier les appuis et leurs réactions
- Identifier les actions mécaniques et leur point d'application

↓

Calculer les réactions d'appuis

Equilibre global de la structure

(Principe fondamental de la statique)

↓

ECHELLE DE LA SECTION

Déterminer les sollicitations dans les poutres

Efforts internes ou de cohésion

(Coupure fictive + équilibre d'une partie)

ECHELLE DU MATERIAU (LOCALE)

Critères de dimensionnement

Contraintes → $\sigma < \sigma_{adm}$; $\tau < \tau_{adm}$

Déformations → $w < w_{lim}$

Objectif du chapitre

Déterminer une relation entre les **efforts tranchants** (échelle section) et **l'état de contrainte** (échelle locale) dans une section droite permettant de **dimensionner** les poutres sollicitées **en cisaillement.**

Plan du chapitre

- **Introduction**
- Observations
- Contraintes de cisaillement ou tangentielles
- Critères de dimensionnement

Exemples de poutres

Baldaquin place de la gare, Marchwell Valentino Marchisella, Berne, 2008

Archi Legno

Aéroport de Barajas, Madrid, 2005

Pont sur la Mentue, GVH, Notheinsen, BG, Tremblet, 1999

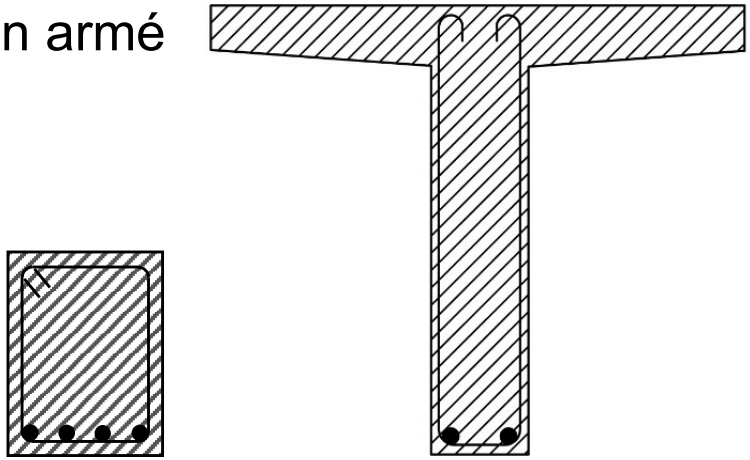
Exemples de sections droites de poutre

- Acier

- Bois

bois rond | bois scié (équarri, massif) | bois lamellé-collé

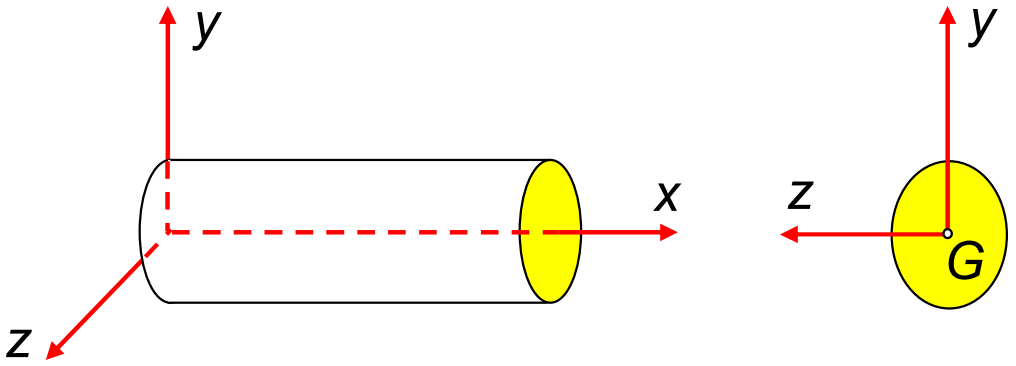
- Béton armé



- Matériaux composites profilés pultrudés standards

Hypothèses

Poutres



- Axe (fibre moyenne) droit
- Section droite constante
- Repère local (G,x,y,z)
- Les axes (G,y) et (G,z) sont des axes principaux d'inertie

Matériau

- Continu
- Homogène
- Elastique
- Linéaire

Déformations

- Hypothèse de Saint-Venant
- Hypothèse de Navier et Bernouilli

Efforts intérieurs dans l'espace

N : **Effort normal** (dans la direction *x*)

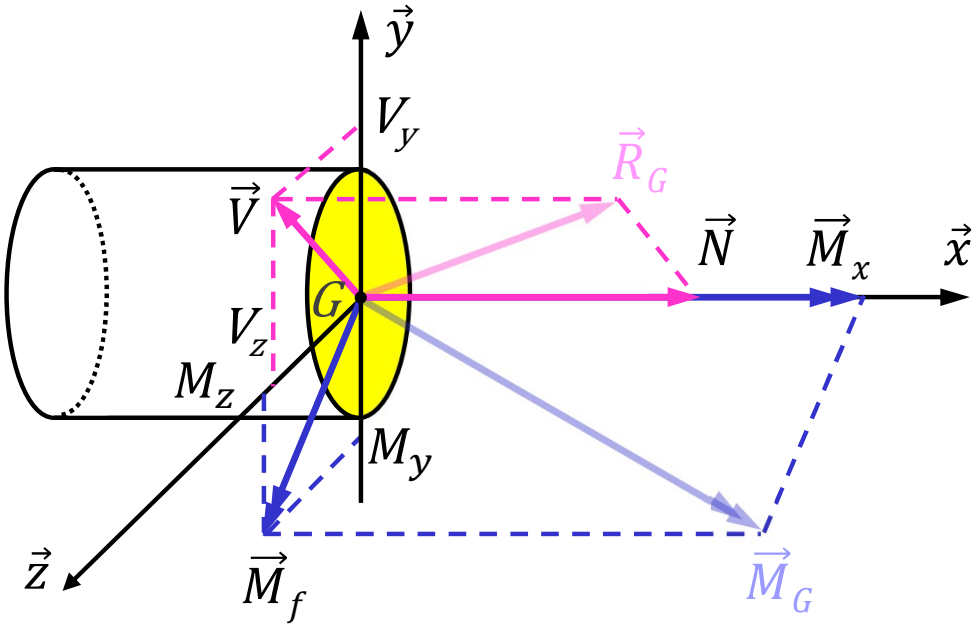
V_y : **Effort tranchant** dans la direction *y*

V_z : **Effort tranchant** dans la direction *z*

M_x : **Moment de torsion** (autour de *x*)

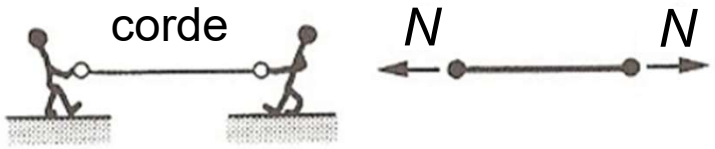
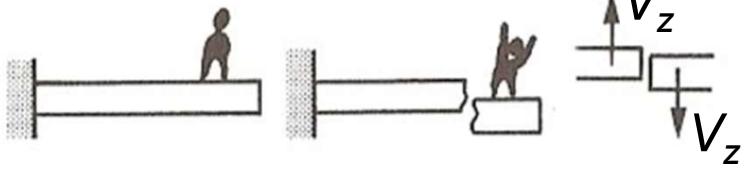
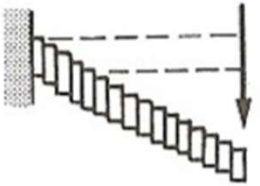
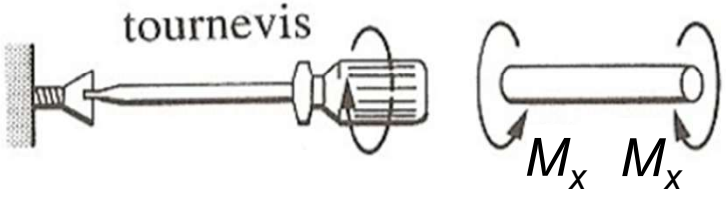
M_y : **Moment de flexion** autour de *y*

M_z : **Moment de flexion** autour de *z*

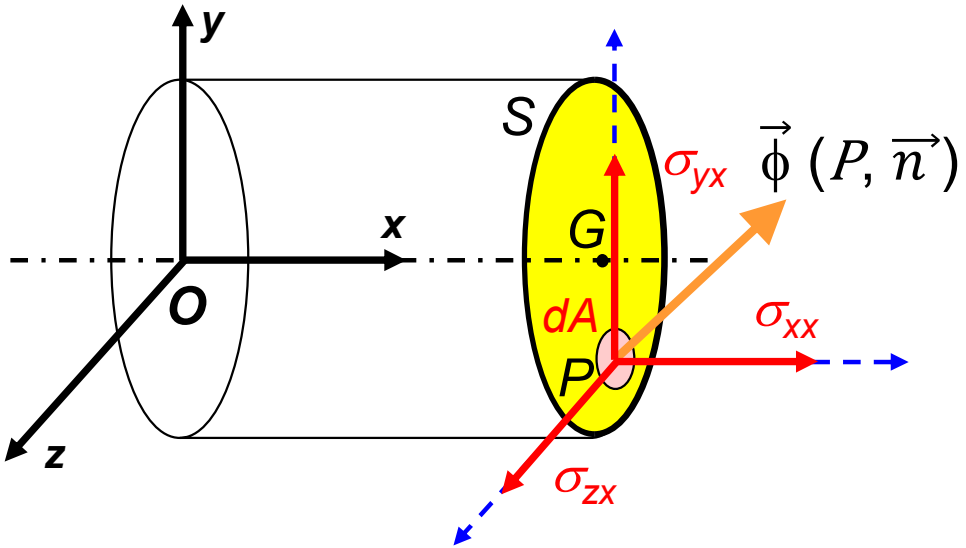


$$\begin{cases} \vec{R}_G = N \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_G = M_x \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Efforts intérieurs et leur effet

Effort intérieur	Illustration et modélisation	Déformation produite
N		allongement (traction) racourcissement (compression)
V_y, V_z		déformation transversale ou glissement 
M_x		torsion ou déformation en hélice
M_y, M_z		courbure

Relations entre contraintes et efforts intérieurs



$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$$

: Contrainte normale

: Contrainte de cisaillement

: Contrainte de cisaillement

$$N = \iint \sigma_{xx} dA$$

$$V_y = \iint \sigma_{yx} dA$$

$$V_z = \iint \sigma_{zx} dA$$

$$M_x = \iint (y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx}) dA$$

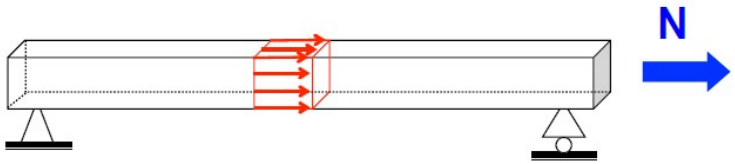
$$M_y = \iint z\sigma_{xx} dA$$

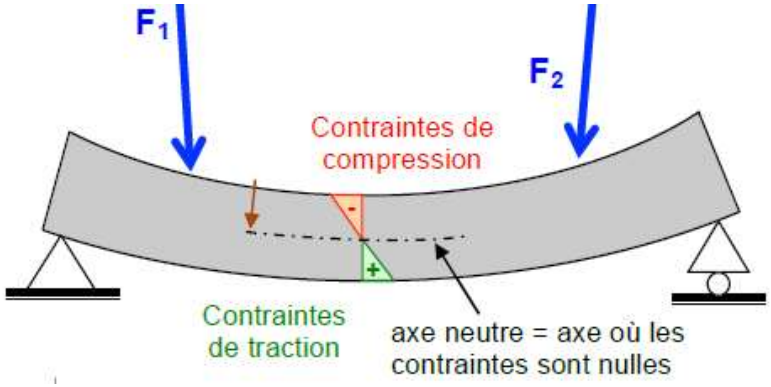
$$M_z = -\iint y\sigma_{xx} dA$$

Relations entre contraintes et efforts intérieurs

Contrainte normale σ

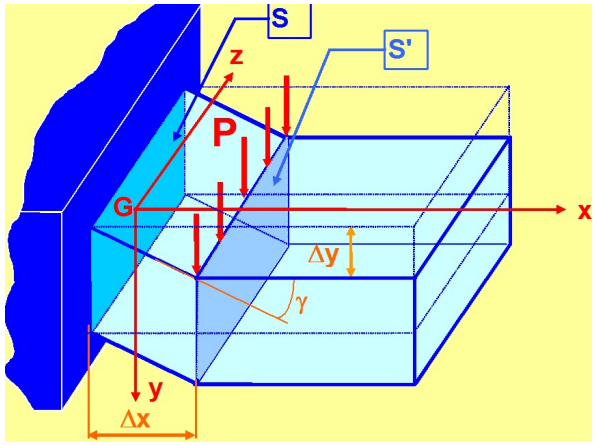
- Contrainte perpendiculaire à la section de coupe d'une structure
- Résulte soit d'un **effort normal *N***, soit d'un **moment fléchissant M_y, M_z**

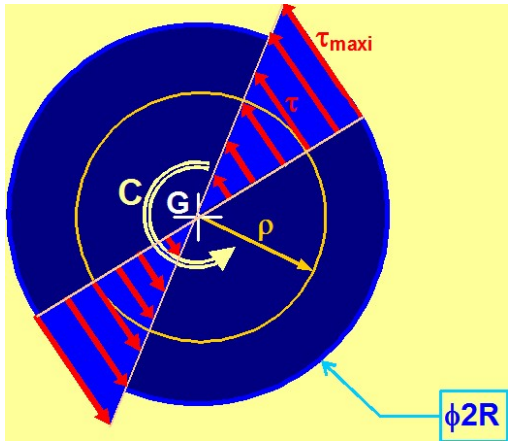




Contrainte de cisaillement τ

- Contrainte tangentielle à la section de coupe d'une structure
- Résulte soit d'un **effort tranchant V_y,V_z**, soit d'un **moment de torsion M_x**





Objectif du chapitre

Déterminer une relation entre les **efforts tranchants** (échelle section) et **l'état de contrainte** (échelle locale) dans une section droite permettant de **dimensionner** les poutres sollicitées **en cisaillement.**

Plan du chapitre

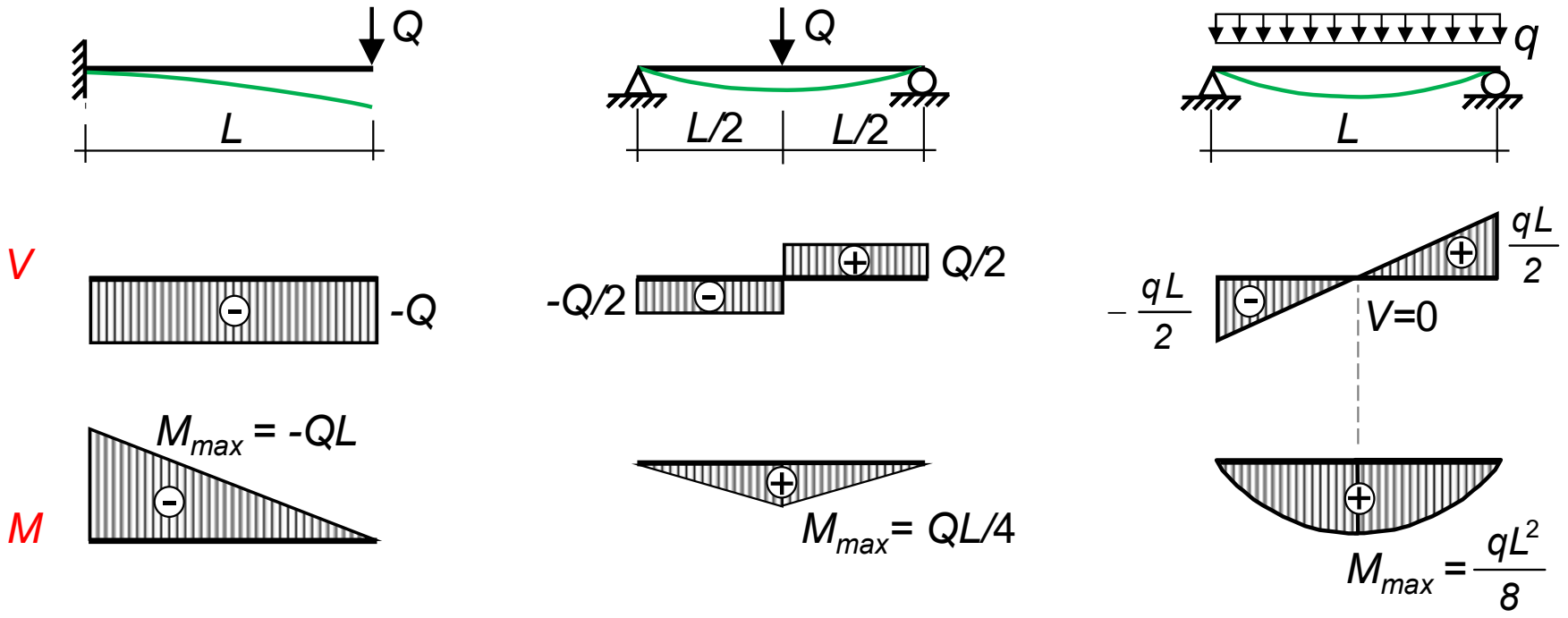
- Introduction
- **Observations**
- Contraintes de cisaillement ou tangentielles
- Critères de dimensionnement

Observations

On observe en pratique que :

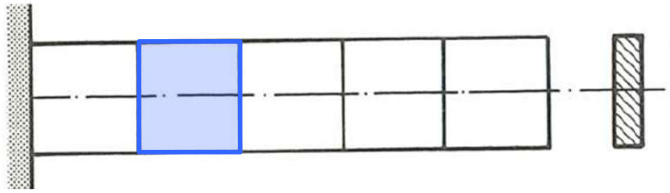
- les τ sont moins importantes, pour le dimensionnement, que les σ
- l'étude des τ est plus compliquée que celle des σ
- la déformation produite par les τ (glissement γ) est souvent négligeable vis-à-vis de celle produite par les σ (allongement/raccourcissement ε et courbure 1/*r*).

L'effort tranchant *V*, dérivée du moment fléchissant *M*, ne peut exister seul dans une poutre, contrairement aux autres efforts intérieurs (*N*, M_x, *M*).



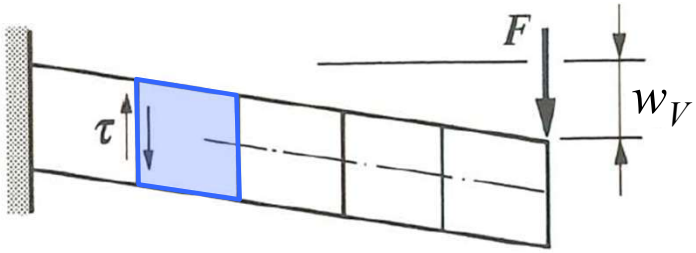
Déformations

On observe l'effet de V uniquement, en supposant la poutre indéformable à la flexion.



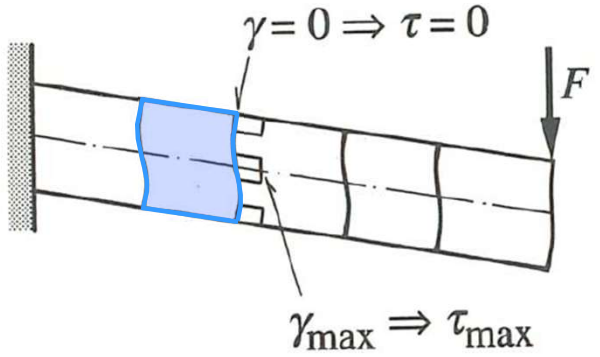
En première approximation, les sections ont tendance à glisser les unes par rapport aux autres. Ce glissement fait apparaître :

- déformation en losange (γ) et par suite des τ
- flèche w_V totalement négligeable devant celle de M



En regardant de plus près :

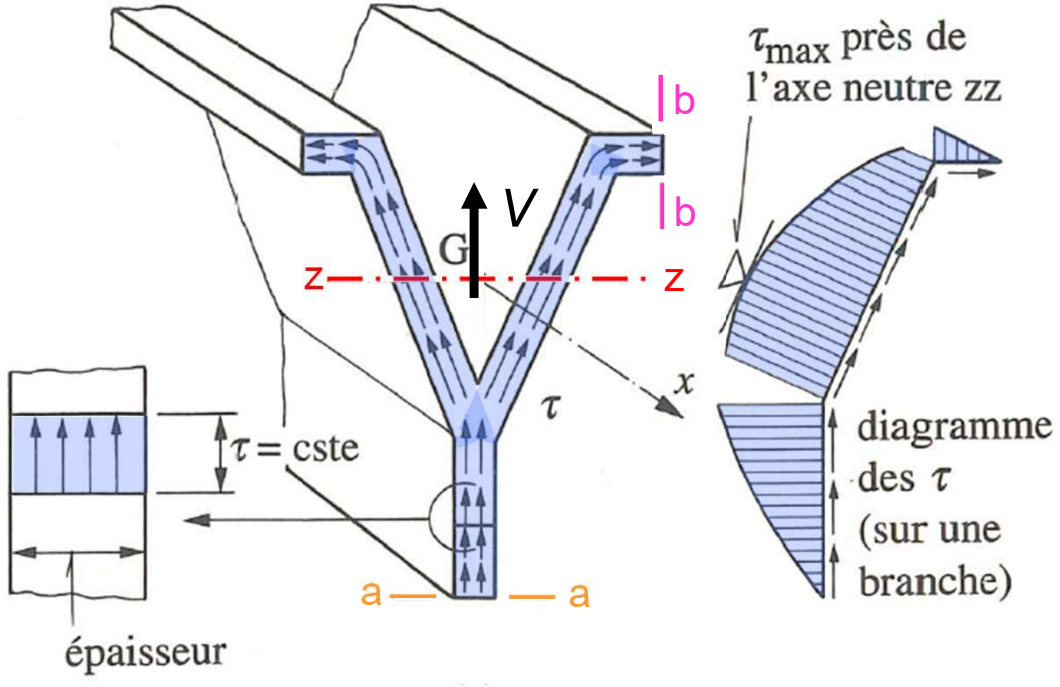
- les sections gauchissent en forme de S
- l'intensité du glissement γ est nulle sur les fibres extrêmes et maximale au centre de la poutre, et donc de même de l'intensité des τ



Contraintes

On conclue à partir des déformations γ que les contraintes de cisaillement τ :

- naissent à l'une des extrémités de la section (a-a)
- progressent en augmentant jusqu'au centre géométrique (axe neutre z-z)
- puis diminuent graduellement pour s'annuler à l'autre extrémité de la section (b-b)



Objectif du chapitre

Déterminer une relation entre les **efforts tranchants** (échelle section) et **l'état de contrainte** (échelle locale) dans une section droite permettant de **dimensionner** les poutres sollicitées **en cisaillement.**

Plan du chapitre

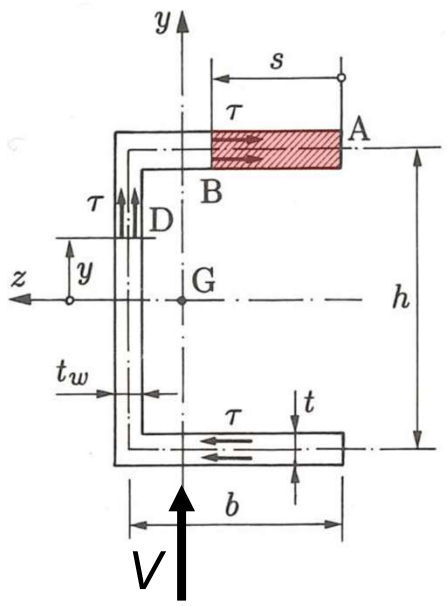
- Introduction
- Observations
- **Contraintes de cisaillement ou tangentielles**
- Critères de dimensionnement

Contraintes de cisaillement

Poutre à parois mince et à section ouverte

Contrainte de cisaillement due à un effort tranchant *V* parallèle à l'âme (selon l'axe *y*) :

$$\tau = \frac{V \cdot S}{I \cdot t(s)}$$



Avec : Moment statique de l'aire hachurée par rapport à l'axe *z* passant par *G* :

$$S = S_{Gz} = \iint y dA = \iint y dy\, dz = Y_G \cdot A$$

Moment d'inertie central de la section droite par rapport à l'axe *z* passant par *G* :

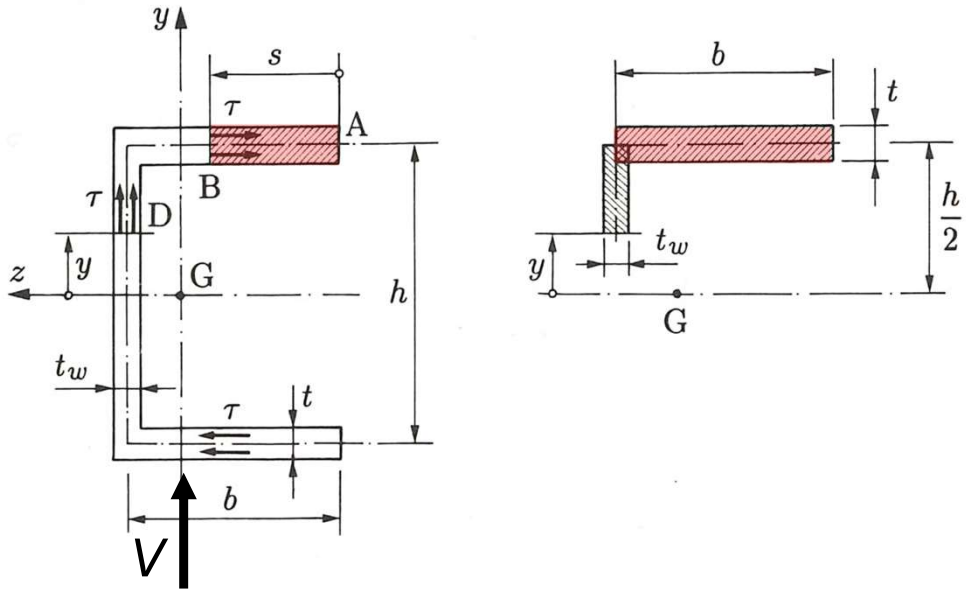
$$I = I_{Gz} = \iint y^2\, dA = \iint y^2 dy\, dz$$

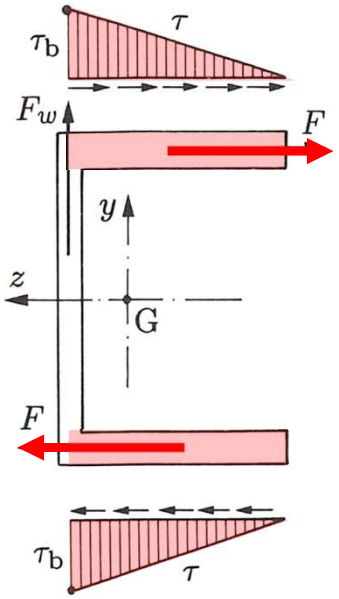
Epaisseur $t(s)$, varie le long de la section droite

Contraintes de cisaillement

Poutre à parois mince et à section ouverte

$$\tau = \frac{VS}{I\,t(s)}$$





Dans les ailes

En *B* : $S = \frac{sth}{2}$ ➡ $\tau = \frac{Vsth}{2It} = \frac{Vsh}{2I}$

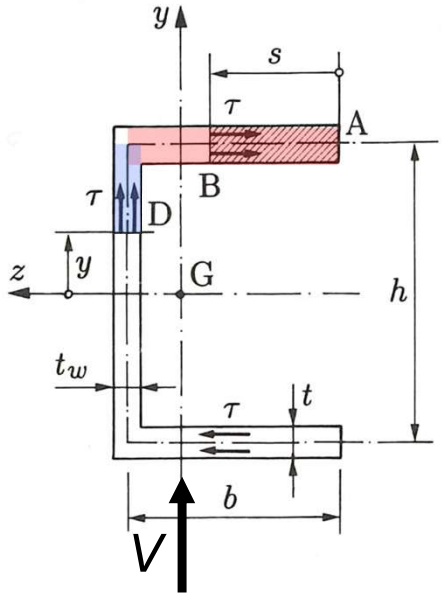
et $\tau_b = \frac{Vbh}{2I}$

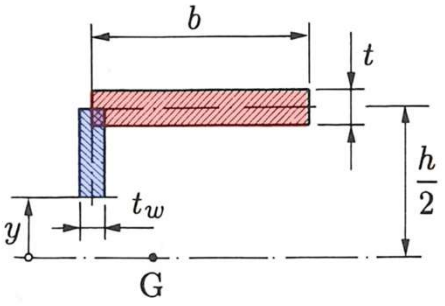
➡ $F = \frac{\tau_b tb}{2} = \frac{Vtb^2h}{4I}$

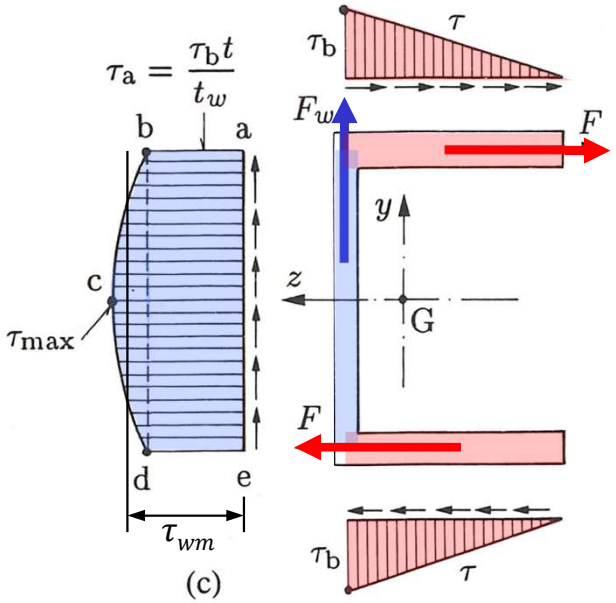
Contraintes de cisaillement

Poutre à parois mince et à section ouverte

$$\tau = \frac{VS}{I\,t(s)}$$







En *D* : $S = t_w\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{h/2 + y}{2} + \frac{tbh}{2}$ ⇒ $\tau = \frac{Vh^2}{8I}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right] + \frac{Vbth}{2I\,t_w}$

⇒ $\tau_{max} = \frac{Vh^2}{8I} + \frac{Vbth}{2I\,t_w}$

⇒ $F_w = \frac{Vt_w h^3}{12I} + \frac{Vbth^2}{2I} = \frac{V}{I}\left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bth^2}{2}\right) = V$

Contrainte moyenne dans l'âme : $\boxed{\tau_{wm} = \frac{V}{A_w}}$ avec A_w : section de l'âme, voir Tables SZS C5.

Contraintes de cisaillement

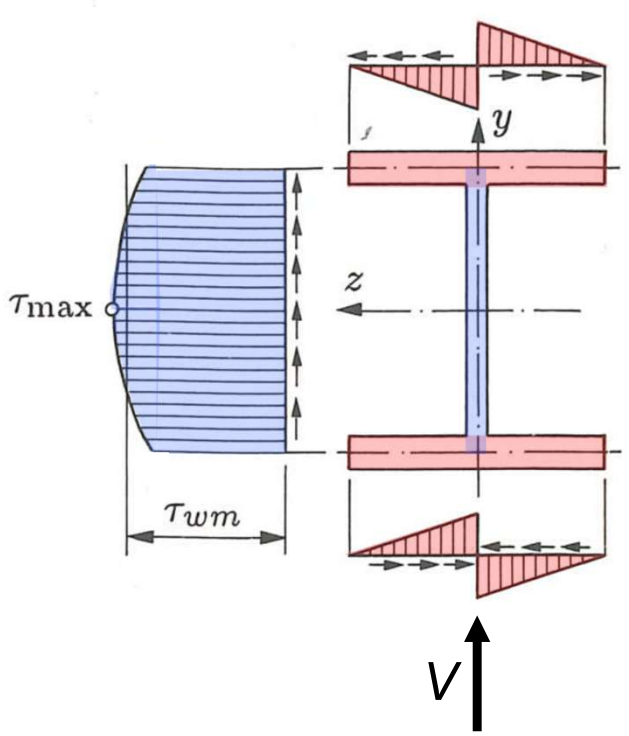
Poutre âme-semelles

Une poutre en I peut être considérée comme deux poutres en U accolées.

Le diagramme des contraintes de cisaillement est linéaire dans les ailes et parabolique dans l'âme.

Calcul approximatif de la contrainte moyenne dans l'âme :

$$\tau_{wm} = \frac{V}{A_w}$$

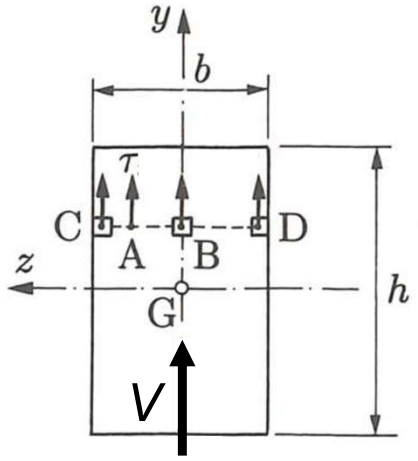


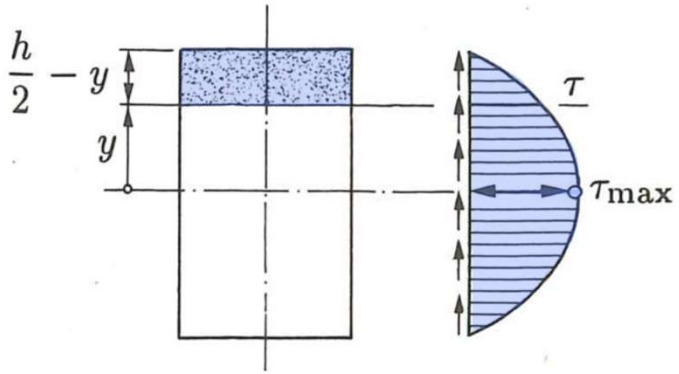
A_w : section de l'âme, voir Tables SZS C5.

Contraintes de cisaillement

Poutre à section massive – rectangulaire

$$\tau = \frac{VS}{I\,t(s)}$$





Contrainte de cisaillement : $\tau = \frac{3V}{2bh}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$

Le diagramme des contraintes de cisaillement est parabolique et le sommet se trouve à l'axe neutre (y=0) et correspond à la contrainte maximale :

$$\tau_{max} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3V}{2A}$$

Valeur 50% supérieure à celle obtenue en supposant une répartition uniforme des contraintes.

Contraintes de cisaillement

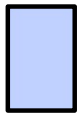
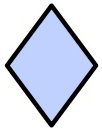
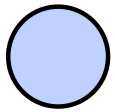
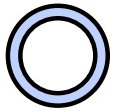
Généralité

La contrainte de cisaillement maximale peut se calculer :

$$\tau_{max} = \lambda \frac{V}{A}$$

λ : facteur de forme en cisaillement

A : aire de la section droite

Type de section		Facteur de forme en cisaillement λ
Section rectangulaire		$\frac{3}{2}$
Section losange regulière		$\frac{9}{8}$
Section circulaire pleine		$\frac{4}{3}$
Section circulaire creuse	 (R extérieur, r intérieur)	$\frac{4}{3}\left[1+\frac{rR}{(r^2+R^2)}\right]$

Objectif du chapitre

Déterminer une relation entre les **efforts tranchants** (échelle section) et **l'état de contrainte** (échelle locale) dans une section droite permettant de **dimensionner** les poutres sollicitées **en cisaillement.**

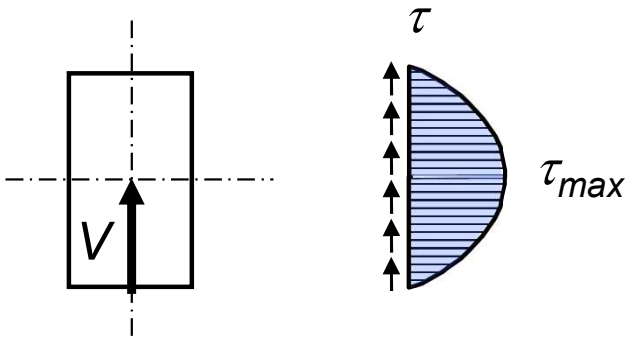
Plan du chapitre

- Introduction
- Observations
- Contraintes de cisaillement ou tangentielles
- **Critères de dimensionnement**

Critères de dimensionnement

Dimensionnement d'une poutre à l'effort tranchant

$$\tau_{max} = \lambda \frac{V}{A} \leq \tau_{adm} = \frac{\tau_e}{s}$$



Avec : λ : facteur de forme en cisaillement

V : effort tranchant

A : aire de la section droite

τ_{adm} : contrainte de cisaillement admissible

τ_e : limite d'élasticité au cisaillement

- matériaux fragiles $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$ (σ_e : limite d'élasticité)

- matériaux ductiles $\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$

s : coefficient de sécurité, $s > 1$