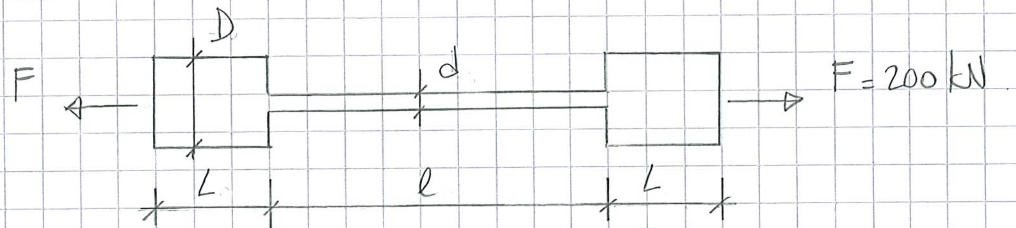
Exercice 5



$D = 5\,cm$

$L = 25\,cm$

a). Diamètre d:

$$\sigma_{\phi d} = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4F}{\pi \sigma}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 220}} = 34 \text{ mm}$$

b). Longueur partie centrale l.

$$u = 2\Delta L + \Delta l = 2 \cdot \varepsilon_L \cdot L + \varepsilon_l \cdot l = 2 \frac{\sigma_L}{E} \cdot L + \frac{\sigma_l}{E} \cdot l = \frac{2F}{E \frac{\pi}{4} D^2} \cdot L + \frac{F}{E \frac{\pi}{4} d^2} l$$

$$= \frac{4F}{\pi E} \left(\frac{2L}{D^2} + \frac{l}{d^2} \right)$$

$$\Rightarrow l = d^2 \cdot \left(\frac{u \pi E}{4F} - \frac{2L}{D^2} \right) = 34^2 \left(\frac{3 \pi 210}{4 \cdot 200} - \frac{2 \cdot 250}{50^2} \right) = 2629 \text{ mm} \simeq 2{,}63\,m$$

Il est aussi possible de déterminer l de la manière suivante:

- zone éprouvette de diamètre $D = 50\,mm$

$$\sigma_{\phi D} = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{200 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{4} \cdot 50^2} = 102 \text{ N/mm}^2$$

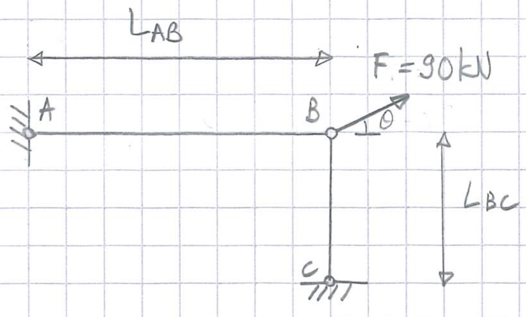
$$\Delta L = \varepsilon_{\phi D} \cdot L = \frac{\sigma_{\phi D}}{E} \cdot L = \frac{102}{210 \cdot 10^3} \cdot 250 = 0{,}121 \text{ mm}$$

- zone éprouvette de diamètre $d = 34\,mm$

$$\left.\begin{aligned} \Delta l &= \varepsilon_{\phi d} \cdot l = \frac{\sigma_{\phi d}}{E} \cdot l \\ \text{et } \Delta l &= u - 2\Delta L \end{aligned}\right\} \Rightarrow l = \frac{E(u - 2\Delta L)}{\sigma_{\phi d}} = \frac{210 \cdot 10^3 \cdot (3 - 2 \cdot 0{,}121)}{220}$$

$$= 2632 \text{ mm} \simeq 2{,}63\,m$$

Exercice 6



$L_{AB} = 1,5\,m$; $A_{AB} = 500\,mm^2$

$L_{BC} = 0,8\,m$; $A_{BC} = 750\,mm^2$

$E = 210\ kN/mm^2$

a) Déplacement de B lorsque $\theta = 30°$

Barre AB : $\Delta L_{AB} = \dfrac{F_x . L_{AB}}{E . A_{AB}}$ avec $F_x = F \cos\theta = 90 . \cos 30° = 77,94\,kN$

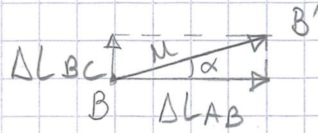
$= \dfrac{90 . \cos 30° . 1,5 . 10^3}{210 . 500} = 1,11\ mm$

Barre BC : $\Delta L_{BC} = \dfrac{F_y . L_{BC}}{E . A_{BC}}$ avec $F_y = F \sin\theta = 90 . \sin 30° = 45\,kN$

$= \dfrac{90 . \sin 30° . 08 . 10^3}{210 . 750} = 0,23\ mm$

$u = \sqrt{\Delta L_{AB}^2 + \Delta L_{BC}^2}$

$= \sqrt{1,11^2 + 0,23^2} = 1,13\ mm$



$\tan\alpha = \dfrac{\Delta L_{BC}}{\Delta L_{AB}} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\dfrac{\Delta L_{BC}}{\Delta L_{AB}}\right) = \arctan\left(\dfrac{0,23}{1,11}\right) = 11,7°$

b). Valeur de θ pour que la direction de déplacement du pt B soit de 45°

$\alpha = 45° \Rightarrow \Delta L_{AB} = \Delta L_{BC} \Rightarrow \dfrac{F \cos\theta . L_{AB}}{E . A_{AB}} = \dfrac{F \sin\theta . L_{BC}}{E . A_{BC}}$

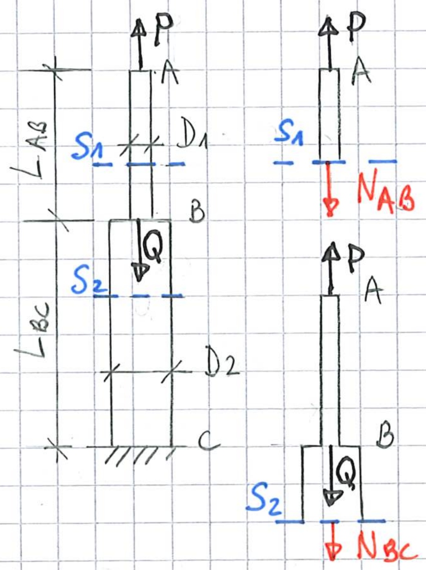
$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{L_{AB} . A_{BC}}{L_{BC} . A_{AB}}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{L_{AB} . A_{BC}}{L_{BC} . A_{AB}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1,5 . 750}{0,8 . 500}\right) = 70,4°$

Valeur du déplacement du point B :

$u = \sqrt{2} . \Delta L_{AB} = \sqrt{2} . \dfrac{90 . \cos 70,4° . 1,5 . 10^3}{210 . 500} = 0,61\ mm$

Exercice 7



. Allongement dû à P sur L_{AB} :

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_{AB}.L_{AB}}{E.A_{AB}} = \frac{P.L_{AB}}{E.\frac{\pi}{4}D_1^2} \quad \text{avec } N_{AB} = P$$

. Raccourcissement dû à P et Q sur L_{BC} :

$$\Delta L_{BC} = \frac{N_{BC}.L_{BC}}{E.A_{BC}} = \frac{(P-Q).L_{BC}}{E.\frac{\pi}{4}D_2^2} \quad \text{avec } N_{BC} = P-Q$$

. Valeur de P pour laquelle le déplacement de A est nul :

$$\Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = 0 \Rightarrow \Delta L_{AB} = -\Delta L_{BC}$$

$$\frac{P.L_{AB}}{E\frac{\pi}{4}D_1^2} = -\frac{(P-Q).L_{BC}}{E\frac{\pi}{4}D_2^2}$$

$$Q - P = P.\frac{L_{AB}}{L_{BC}}\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

$$P = Q.\frac{1}{\left(1+\frac{L_{AB}}{L_{BC}}.\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2\right)}$$

$$= 150\,\frac{1}{\left(1+\frac{600}{800}\left(\frac{50}{20}\right)^2\right)} = 26,4 \text{ kN}$$

$L_{AB} = 600$ mm ; $L_{BC} = 800$ mm

$D_1 = 20$ mm ; $D_2 = 50$ mm

$E = 210$ GPa $= 210$ kN/mm^2

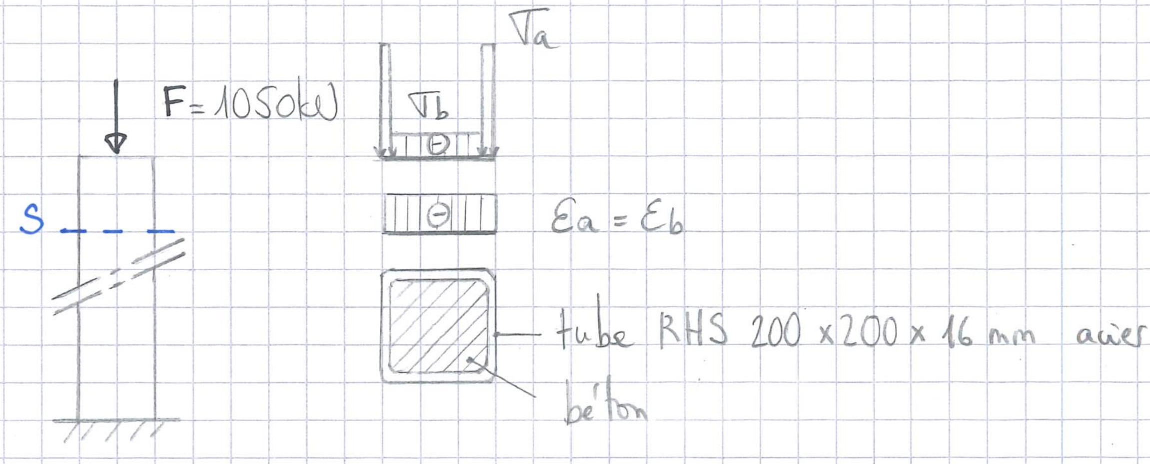
$Q = 150$ kN

. Déplacement de B :

$$\Delta L_{BC} = \frac{(P-Q).L_{BC}}{E.\frac{\pi}{4}.D_2^2}$$

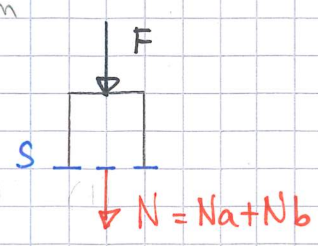
$$= \frac{(26,4-150).800}{210.\frac{\pi}{4}.50^2} = -0,24 \text{ mm}$$

Exercice 8



$E_a = 210\ kN/mm^2$ | $A_a = 11'500\ mm^2$

$E_b = 30\ kN/mm^2$ | $A_b \simeq (200 - 2.16)^2 = 168^2 = 28'224\ mm^2$



- Relation 1 : équilibre de la section

$$\sum F_y = 0 : -N - F = 0 \Rightarrow N = -F = N_a + N_b \quad (1)$$

- Relation 2 : l'acier et le béton subissent la même variation de longueur. l'adhérence entre ces deux matériaux empêche le glissement relatif (décollement), ils travaillent solidairement

$$\Delta L_a = \Delta L_b \Rightarrow \frac{N_a . L}{E_a\, A_a} = \frac{N_b . L}{E_b . A_b}$$

$$\Rightarrow N_a = N_b . \frac{E_a}{E_b} . \frac{A_a}{A_b} \quad (2)$$

On remplace (2) dans (1) :

$$N_b . \left(\frac{E_a}{E_b} . \frac{A_a}{A_b} + 1\right) = -F \Rightarrow N_b = \frac{-F}{\left(\frac{E_a}{E_b} . \frac{A_a}{A_b} + 1\right)} = \frac{-1050}{\left(\frac{210}{30} . \frac{11'500}{28'224} + 1\right)} = -272{,}57\ kN$$

$$\Rightarrow N_a = N_b . \frac{E_a}{E_b} . \frac{A_a}{A_b} = -272{,}57 . \frac{210}{30} . \frac{11'500}{28'224} = -777{,}43\ kN$$

- Contraintes

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_a} = \frac{-777{,}43 . 10^3}{11'500} = -67{,}6\ N/mm^2$$

$$\sigma_b = \frac{N_b}{A_b} = \frac{-272{,}57 . 10^3}{28'224} = -9{,}7\ N/mm^2$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b}\,\sigma_b = 7\,\sigma_b$$