TB_SRM1 : Structure et résistance des matériaux 1

Chapitre 2. Théorie des poutres

Baldaquin place de la gare à Berne, Marchwell Valentino Marchisella, 2008, marchwell.com

Hes·SO GENÈVE
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

h e p i a
Haute école du paysage, d'ingénierie
et d'architecture de Genève

Archi Legno

ECHELLE GLOBALE

Modéliser le problème à résoudre :

- Identifier les appuis et leurs réactions
- Identifier les actions extérieures et leur point d'application

Calculer les réactions d'appuis

Equilibre global de la structure

(Principe fondamental de la statique)

ECHELLE DE LA SECTION

Déterminer les sollicitations dans les poutres

Efforts intérieurs ou de cohésion

(Coupe fictive + équilibre d'une partie)

Contraintes σ

Déplacements w

ECHELLE DU MATERIAU (LOCALE)

Critères de dimensionnement

$\sigma < \sigma_{adm}$

$\tau < \tau_{adm}$

$w < w_{lim}$

Plan du chapitre

Théorie des poutres

- Hypothèses générales (géométrie, matériau, appuis, charges)
- Poutres isostatiques
- Efforts intérieurs
- Caractéristiques géométriques des sections (centre de gravité, moment d'inertie, etc.)
- Etude des différentes sollicitations
    - Traction – Compression
    - Cisaillement
    - Flexion

1. **Hypothèses générales**
    - Hypothèses sur le solide
    - Hypothèses sur le matériau
    - Hypothèses fondamentales de la RDM
    - Conditions d'appui
2. Principe fondamental de la statique

    Equations d'équilibre
3. Efforts intérieurs dans les poutres
    - Définition, expression des efforts intérieurs
    - Dénomination des composantes
    - Diagrammes des efforts intérieurs

Hypothèses générales

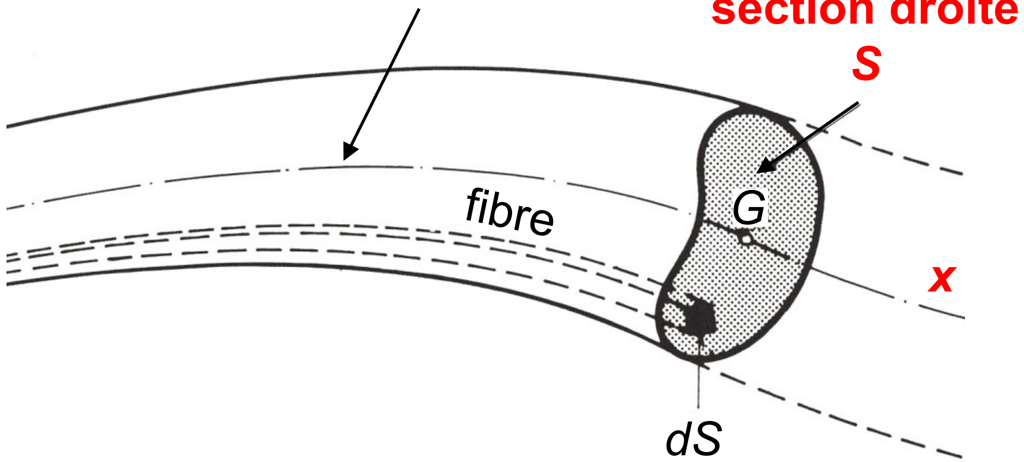
Définition des **restrictions** et **conditions** pour appliquer correctement la théorie des poutres.

- **Hypothèses sur le solide**
- Hypothèses sur le matériau
- Hypothèses fondamentales de la RDM
- Conditions d'appui

Hypothèses sur le solide

Définition d'une poutre

Élément structural allongé, caractérisé géométriquement par :



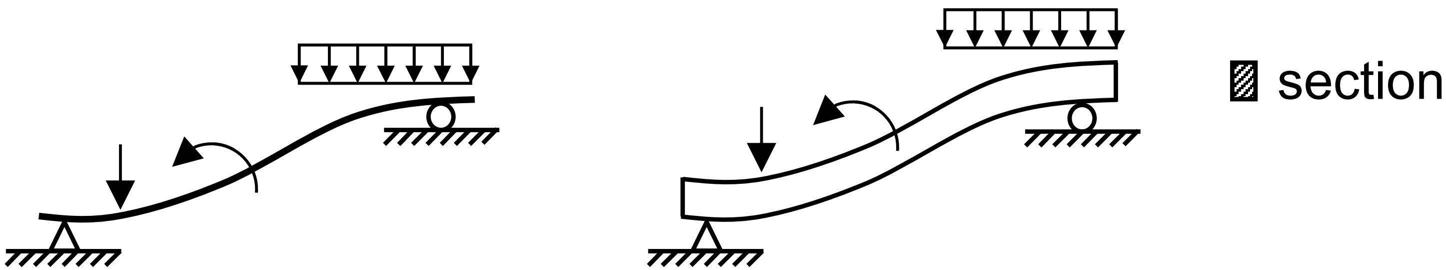
Section droite *S* normale à l'axe *x*
(*G* = centre de gravité)

Dimensions de *S* petites par rapport à la longueur

Poutre à section constante : *S* invariable

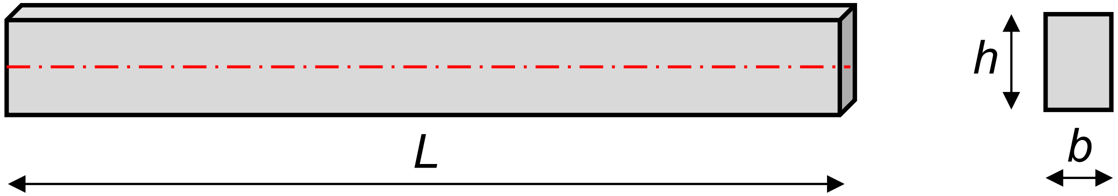
Poutre droite : axe *x* droit

Schéma statique : axe et appuis (ou contour pour différencier les poutres des barres).

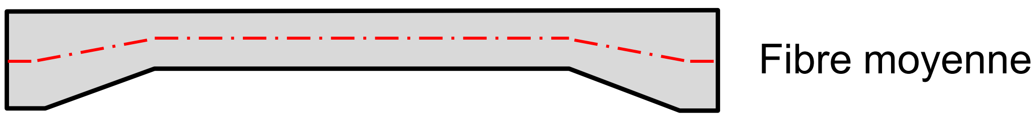


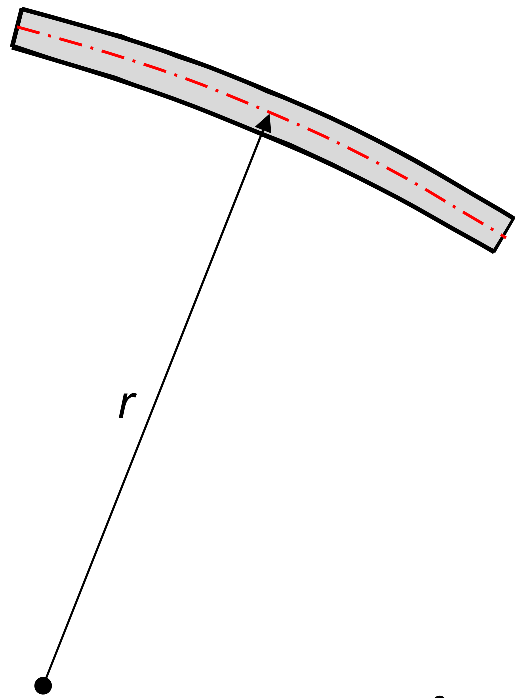
Propriétés géométriques d'une poutre

- La longueur *L* de la poutre doit être grande par rapport à la plus grande dimension transversale de la section droite (rapport *L*/*h* supérieur à 5).



- La section droite *S* de la poutre est constante ou varie très progressivement.





- Le rayon de courbure *r* de la fibre moyenne est grand par rapport à la plus grande dimension radiale de la section droite (rapport *r*/*h* supérieur à 5).

Hypothèses sur le solide

Exemples de poutres

Baldaquin place de la gare, Marchwell Valentino Marchisella, Berne, 2008

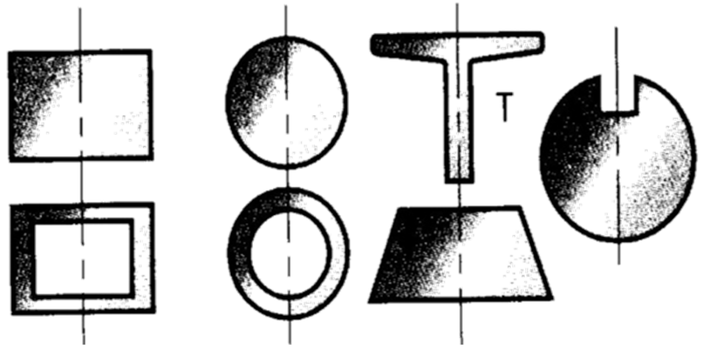
Aéroport de Barajas, Madrid, 2005

Aérogare de Saint-Exupéry, Lyon, 1994

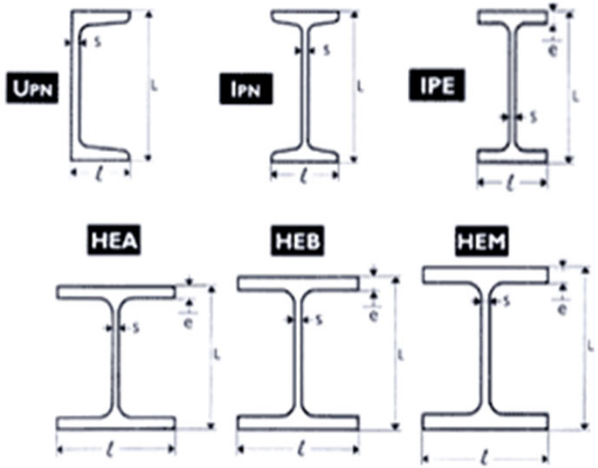
Hypothèses sur le solide

Exemples de sections droites de poutre

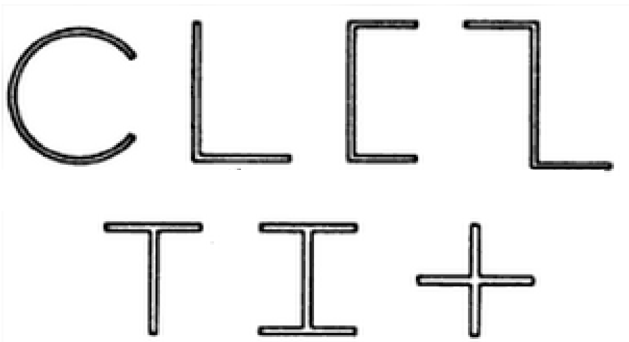
- Sections fermées (pleines ou non)



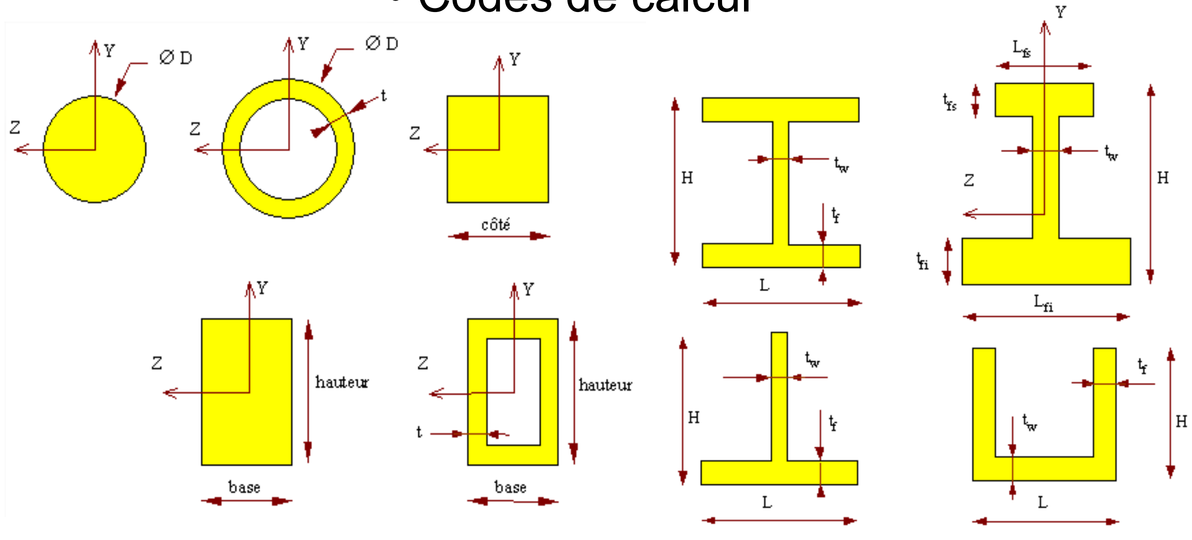
- Sections normalisées (dimensions prédéfinies)



- Sections ouvertes à parois minces



- Codes de calcul



Hypothèses sur le solide

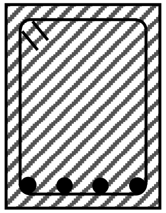
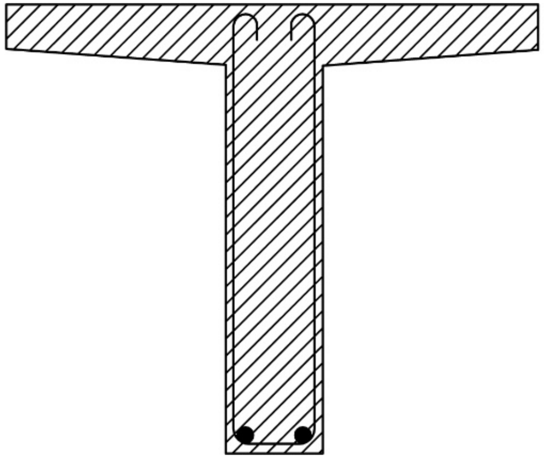
Exemples de sections droites de poutre

- Acier



- Matériaux composites pultrudés GFRP

- Béton armé

- Bois



bois rond

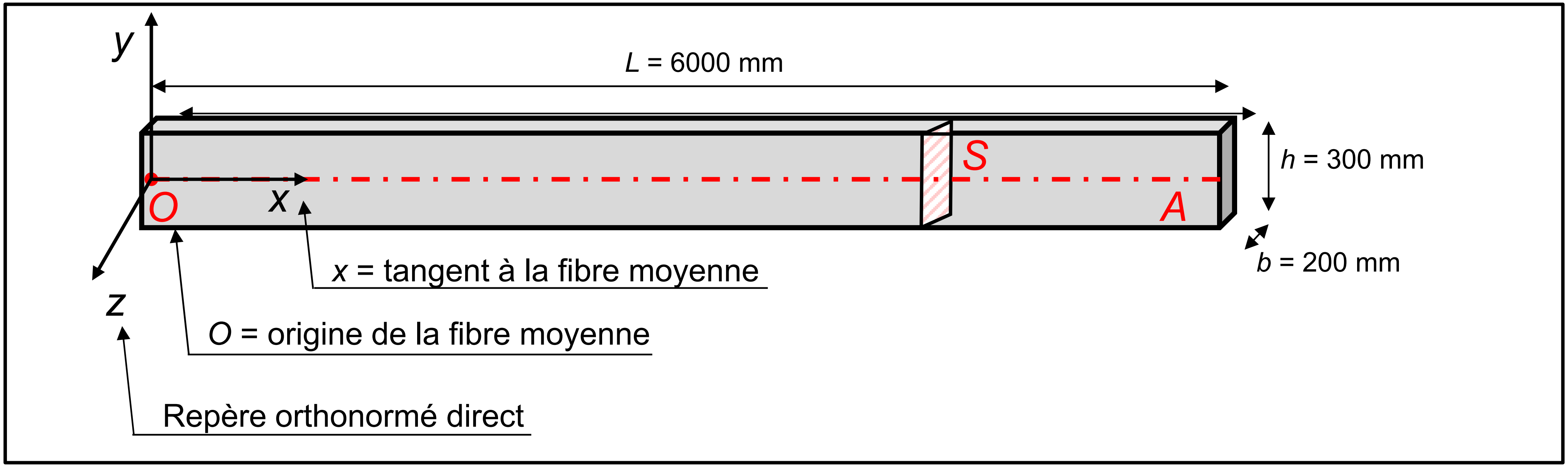
bois scié (équarri, massif)

bois lamellé-collé

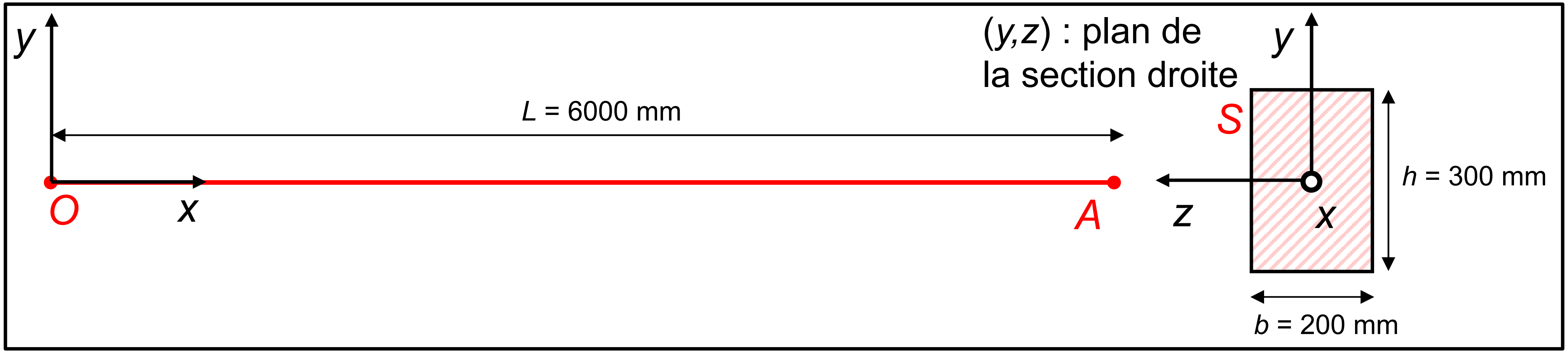
Hypothèses sur le solide

Schématisation et repère

Poutre réelle :



Modèle associé et repère :



Hypothèses générales

Définition des **restrictions** et **conditions** pour appliquer correctement la théorie des poutres.

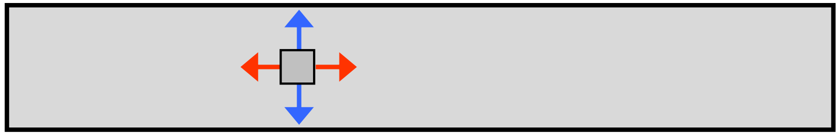
- Hypothèses sur le solide
- **Hypothèses sur le matériau**
- Hypothèses fondamentales de la RDM
- Conditions d'appui

Hypothèses sur le matériau

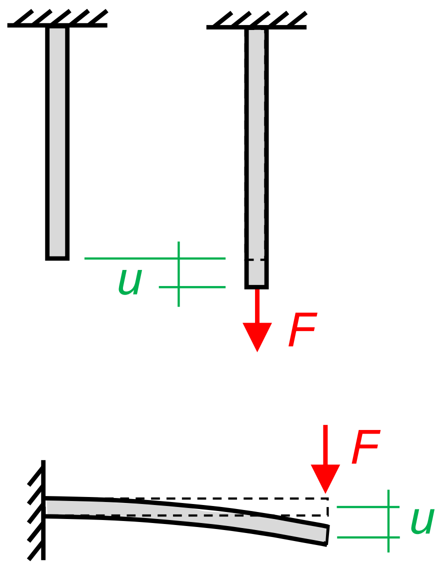
On suppose que la structure étudiée est constituée d'un matériau :

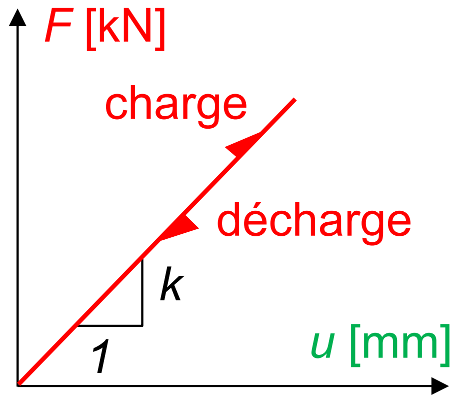
- **Homogène** : mêmes propriétés dans tout le matériau

- **Isotrope** : mêmes propriétés suivant toutes les directions



- **Elastique** : retour à la position initiale après relâchement des actions extérieures
- **Linéaire** : proportionnalité « charge - déplacement »





Hypothèses générales

Définition des **restrictions** et **conditions** pour appliquer correctement la théorie des poutres.

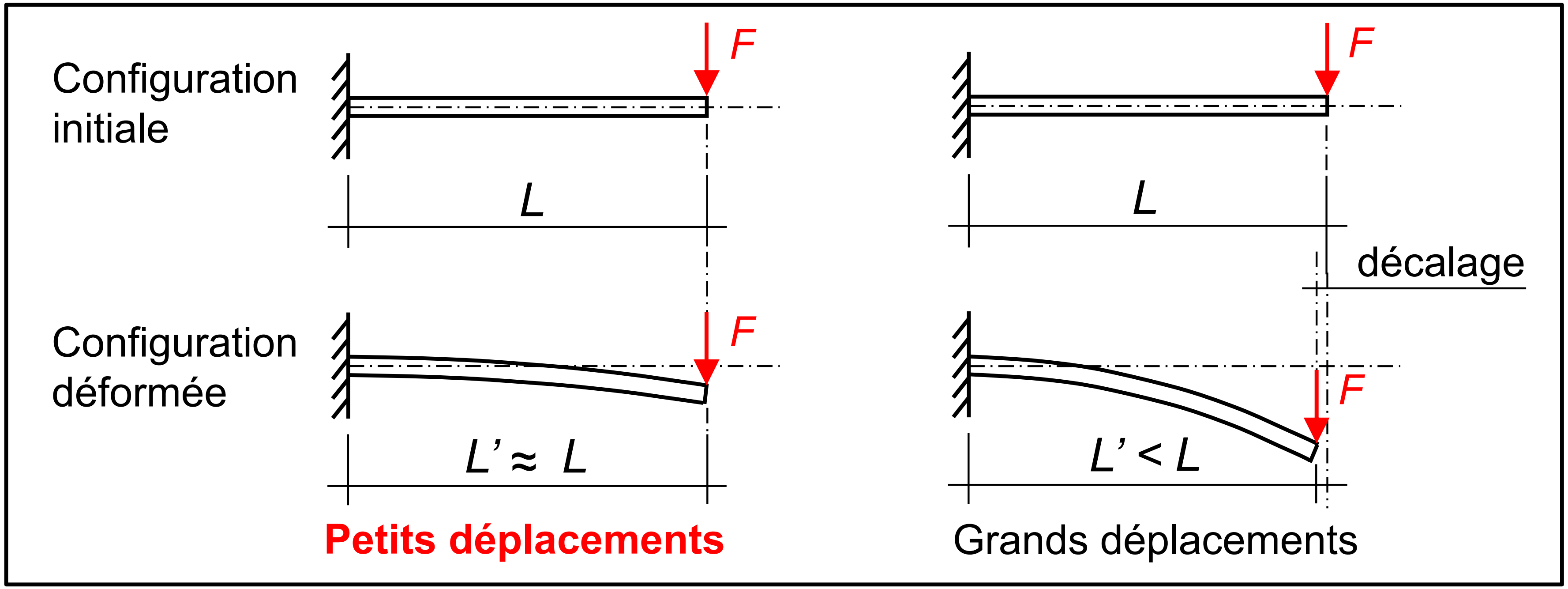
- Hypothèses sur le solide
- Hypothèses sur le matériau
- **Hypothèses fondamentales de la RDM**
- Conditions d'appui

Hypothèses fondamentales de la RDM

Hypothèse sur les déplacements - linéarité géométrique

Si les **déplacements**, **rotations et déformations** restent **faibles**, alors :

- Les configurations initiale et déformée restent quasiment confondues
- Les équations peuvent se formuler dans la configuration initiale connue



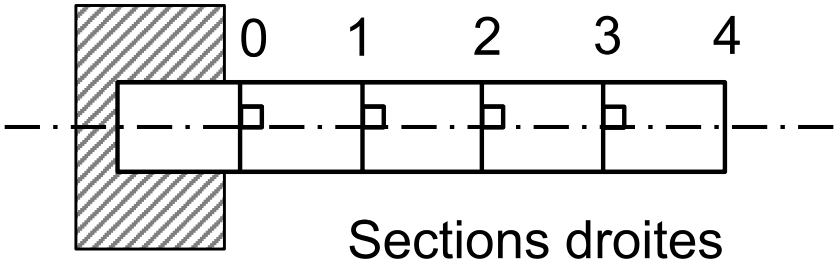
Principe de superposition des effets statiques

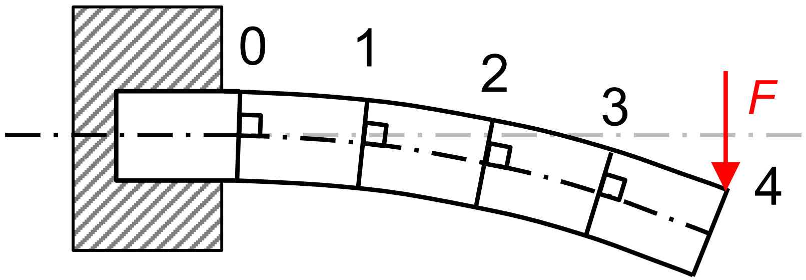
L'effet statique engendré par un système de forces est égal à la somme algébrique des effets engendrés par chacune des forces prise isolément.

Hypothèse de Navier-Bernouilli

Les **sections droites restent droites** après déformation de la poutre.

Une section est « droite » si elle est plane et perpendiculaire à la ligne moyenne.





Hypothèses générales

Définition des **restrictions** et **conditions** pour appliquer correctement la théorie des poutres.

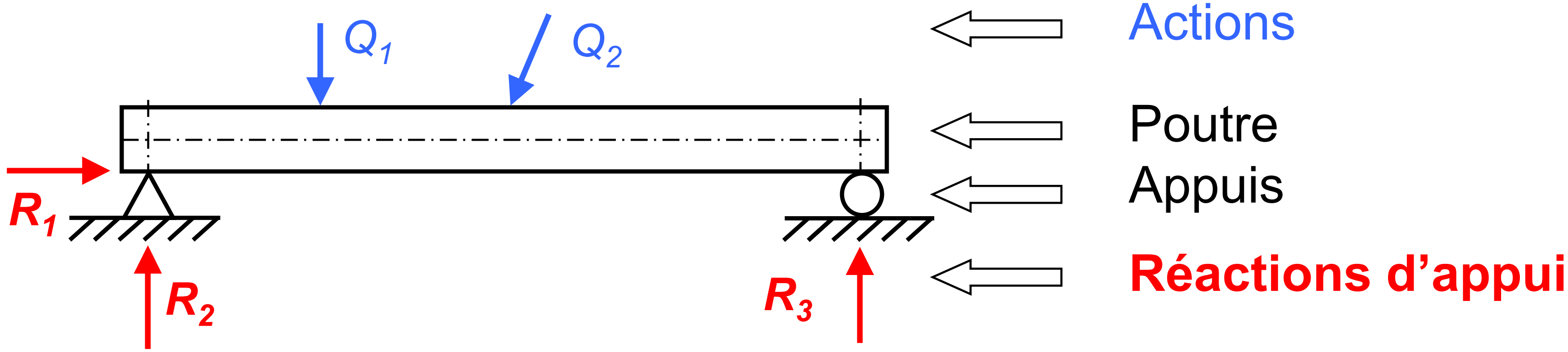
- Hypothèses sur le solide
- Hypothèses sur le matériau
- Hypothèses fondamentales de la RDM
- **Conditions d'appui**

Conditions d'appui

Les poutres reposent sur leurs fondations ou sur d'autres éléments porteurs par l'intermédiaires d'appuis.

Les **appuis bloquent certaines composantes de déplacement** de manière à prévenir les mouvements d'ensemble de la poutre et garantir son équilibre.

Chaque **blocage** fait naître la **réaction d'appui associée**.



Conditions d'appui

Dans la construction, les appuis se classifient en trois familles :

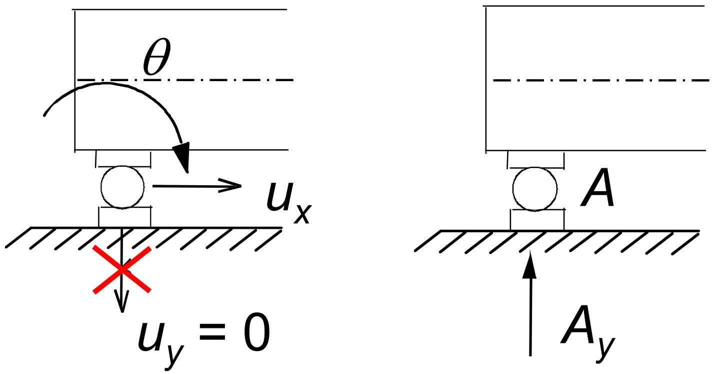
- **Appui simple** ou appui à rouleau
- **Appui fixe**, appui articulé, articulation ou rotule
- **Encastrement**

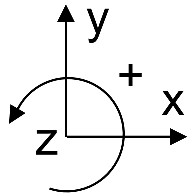
Chaque famille peut bloquer un certain nombre de déplacements et transmettre les réactions correspondantes.

Blocage d'un degré de liberté en translation selon une direction *D*	⟷	Force selon la direction *D*
Blocage d'un degré de liberté en rotation autour d'un axe *D*	⟷	Moment autour de l'axe *D*

Conditions d'appui

Appui simple (dans le plan)





$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{M}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'**appui simple** ou **à rouleau** impose **1 blocage** de translation (u_y).

La réaction d'appui associée est **1 composante** passant par A (A_y).

Permet la libre dilatation des ouvrages sous variations de la température ΔT par ex.

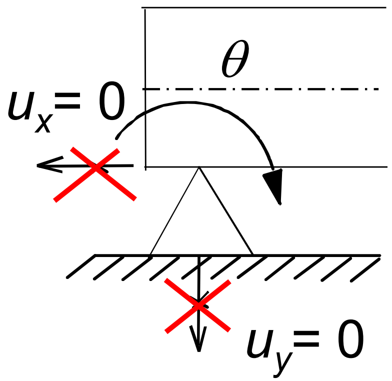
Appui linéaire oscillant MAGEBA

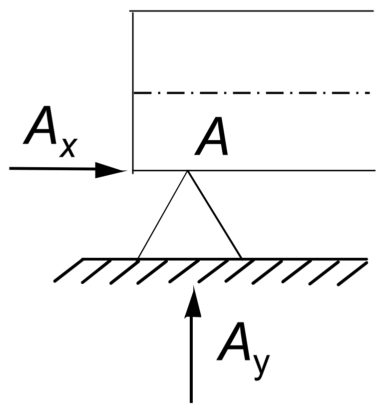
Appui élastomère MAGEBA

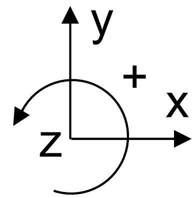
Trous oblongs, A. Kohler

Conditions d'appui

Appui fixe (dans le plan)



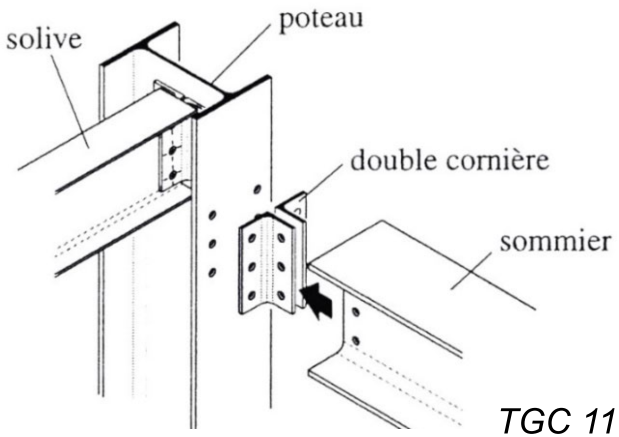




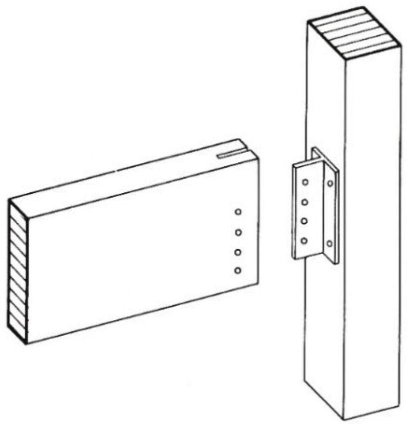
$$\boxed{\vec{R}_A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{M}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

L'**appui fixe, articulé, articulation** ou **rotule** impose les **2 blocages** de translation (u_x et u_y) mais laisse libre la rotation θ autour de l'appui.

La réaction d'appui associée est constituée de **2 composantes** passant par A (A_x et A_y).



TGC 11 2005

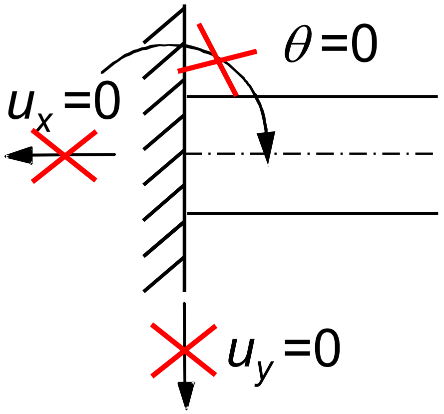


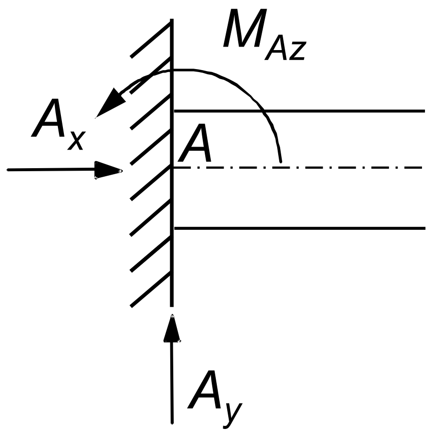
ferrure en té boulonnée à la colonne, poutre avec entaille, liaison par des broches

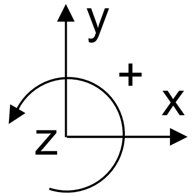
Herzog 2007

Conditions d'appui

Encastrement (dans le plan)



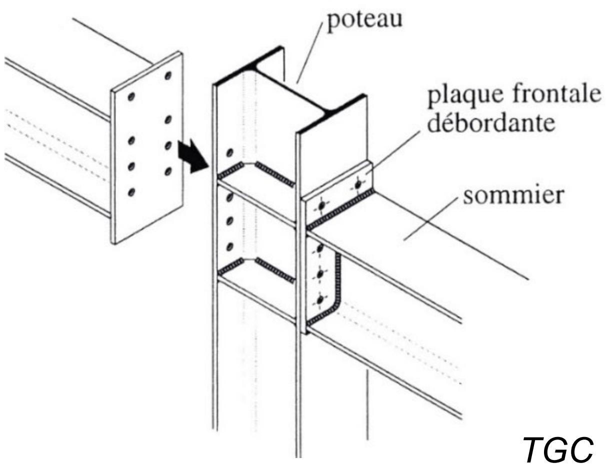




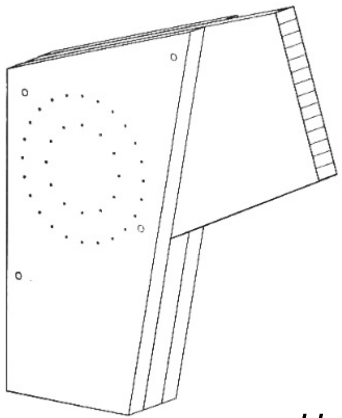
$$\vec{R}_A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{M}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Az} \end{pmatrix}$$

L'**encastrement** n'autorise **aucune translation** et **aucune rotation**.

La réaction d'appui associée est constituée de **2 composantes** passant par *A* (A_x et A_y) et **1 moment d'encastrement** (M_{Az} ou noté simplement M_A) .



TGC 11 2005



couronne de connecteurs (broches), colonne moisée

Herzog 2007

Plan du chapitre

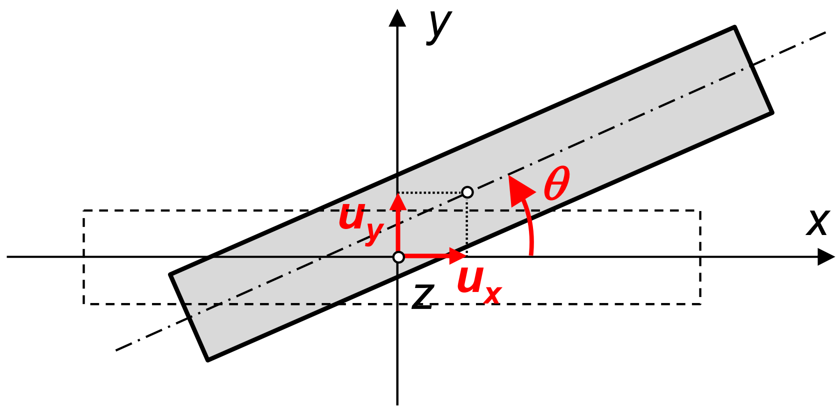
Théorie des poutres

- Hypothèses générales (géométrie, matériau, appuis, charges)
- Poutres isostatiques
- Efforts intérieurs
- Caractéristiques géométriques des sections (centre de gravité, moment d'inertie, etc.)
- Etude des différentes sollicitations
    - Traction – Compression
    - Cisaillement
    - Flexion

1. Hypothèses générales
    - Hypothèses sur le solide
    - Hypothèses sur le matériau
    - Hypothèses fondamentales de la RDM
    - Conditions d'appui
2. **Principe fondamental de la statique**

    Equations d'équilibre
3. Efforts intérieurs dans les poutres
    - Définition, expression des efforts intérieurs
    - Dénomination des composantes
    - Diagrammes des efforts intérieurs

Déplacements d'une structure

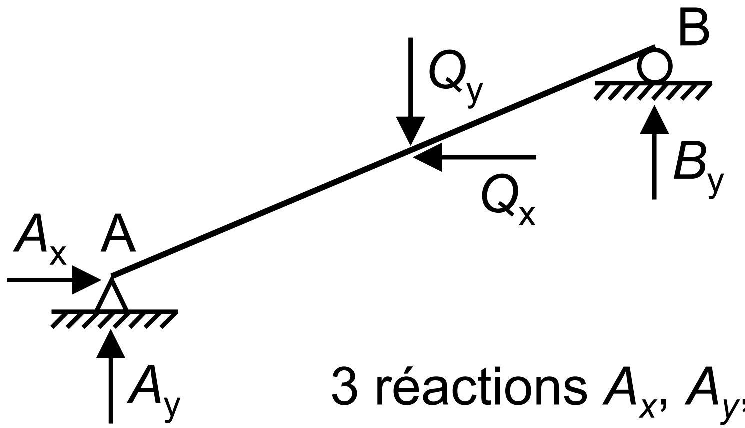


3 déplacements dans le plan :

- translation u_x
- translation u_y
- rotation θ autour de l'axe z

(6 déplacements dans l'espace)

3 blocages au min. sont nécessaires pour s'opposer au mouvement **dans le plan**
(6 blocages dans l'espace) ➡ rôle des appuis

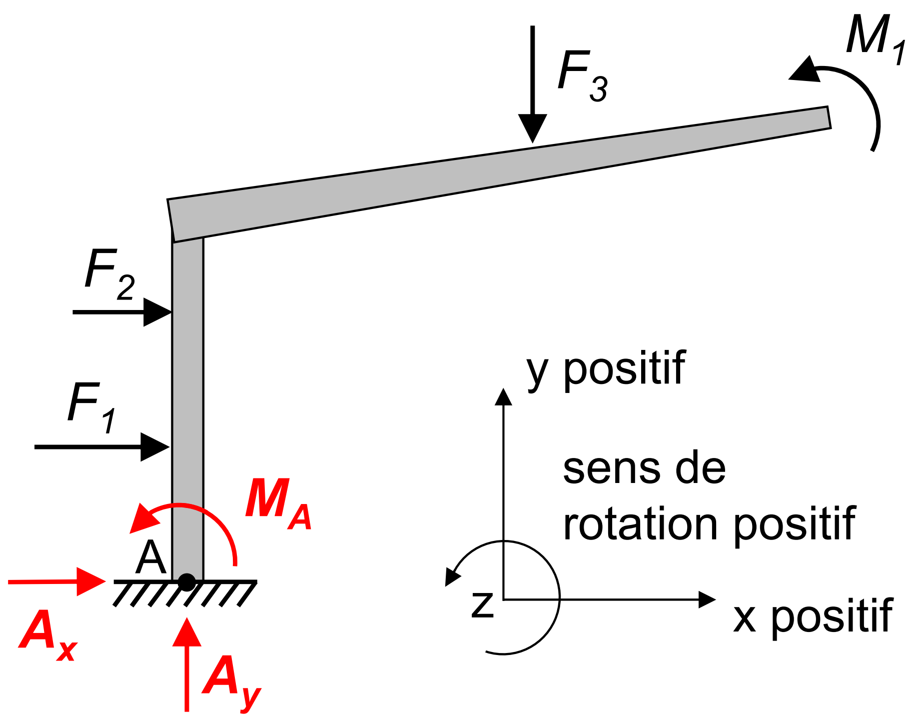


3 réactions A_x, A_y, B_y

Nombre de blocages =
nombre possible de déplacements :

➡ **système isostatique**
(statiquement déterminé)

Equations d'équilibre



La structure doit rester en équilibre, immobile.

Pour qu'elle ne bouge ni en translation ni en rotation, il faut que la somme de toutes les forces extérieures soit nulle.

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{ext} = \vec{0} \end{cases}$$

3 équations d'équilibre dans le plan ➡

$$\boxed{\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array}\right\} \text{translation} \\ \sum M_A = 0 \quad \text{rotation} \end{cases}}$$

Le principe d'équilibre permet de déterminer les réactions inconnues.

Plan du chapitre

Théorie des poutres

- Hypothèses générales (géométrie, matériau, appuis, charges)
- Poutres isostatiques
- Efforts intérieurs
- Caractéristiques géométriques des sections (centre de gravité, moment d'inertie, etc.)
- Etude des différentes sollicitations
  - Traction – Compression
  - Cisaillement
  - Flexion

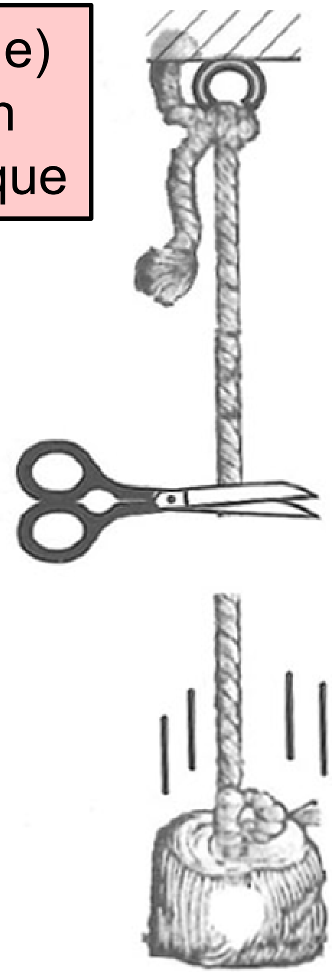
1. Hypothèses générales
   - Hypothèses sur le solide
   - Hypothèses sur le matériau
   - Hypothèses fondamentales de la RDM
   - Conditions d'appui
2. Principe fondamental de la statique

   Equations d'équilibre
3. **Efforts intérieurs dans les poutres**
   - Définition, expression des efforts intérieurs
   - Dénomination des composantes
   - Diagrammes des efforts intérieurs

Efforts intérieurs dans les poutres: Mise en évidence

(Objet + Corde) en équilibre statique

(Objet + Corde) n'est plus en équilibre statique



Partie supérieure

Partie inférieure

Forces supprimées au niveau de la coupure

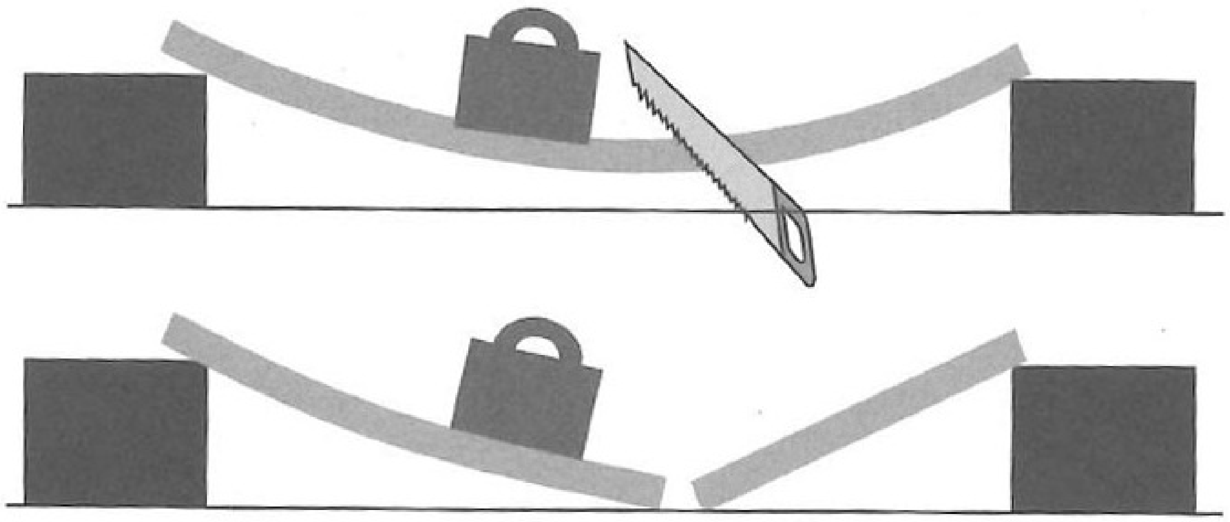
Forces internes à la corde

Cohésion interne de la matière

Résultante des forces intermoléculaires qui naissent dès que l'on cherche à faire varier la distance initiale entre molécules

Efforts intérieurs dans les poutres: Mise en évidence

Partie de gauche ⟷ Partie de droite



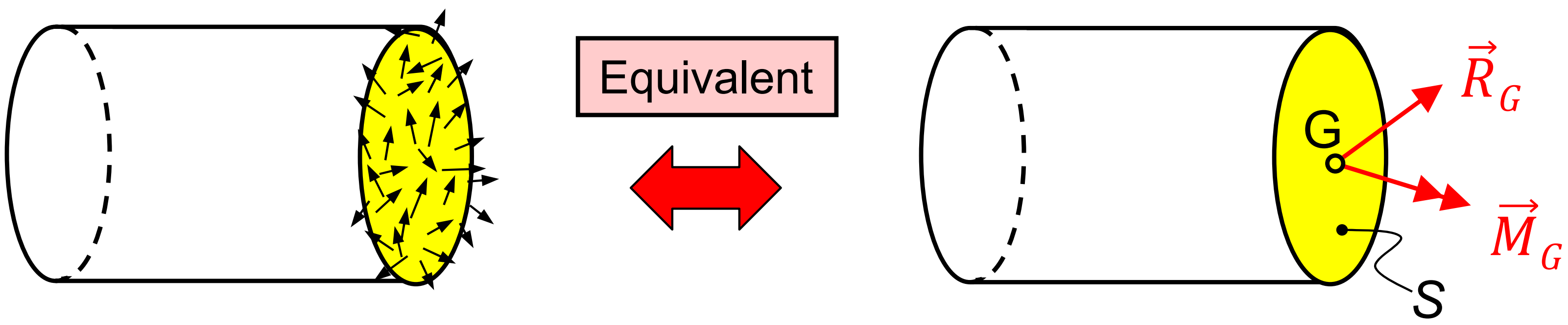
Poutre en équilibre statique

Poutre n'est plus en équilibre statique

Forces supprimées au niveau de la coupure → Forces internes à la poutre → Cohésion interne de la matière

Efforts intérieurs = Efforts de cohésion

- Qualifient et quantifient la manière dont une poutre est sollicitée dans une section particulière.
- Rendent compte de la nature et de l'amplitude des forces auxquelles est soumise chaque section.
- Représentent une vision globale sur la section droite de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la section.



Forces intérieures réparties

Effet global équivalent

En statique appliquée, on se contente de trouver l'effet global produit par les forces intérieures au centre géométrique *G* de la section : une **force résultante** $\vec{R}_G$ et un **moment résultant** $\vec{M}_G$.

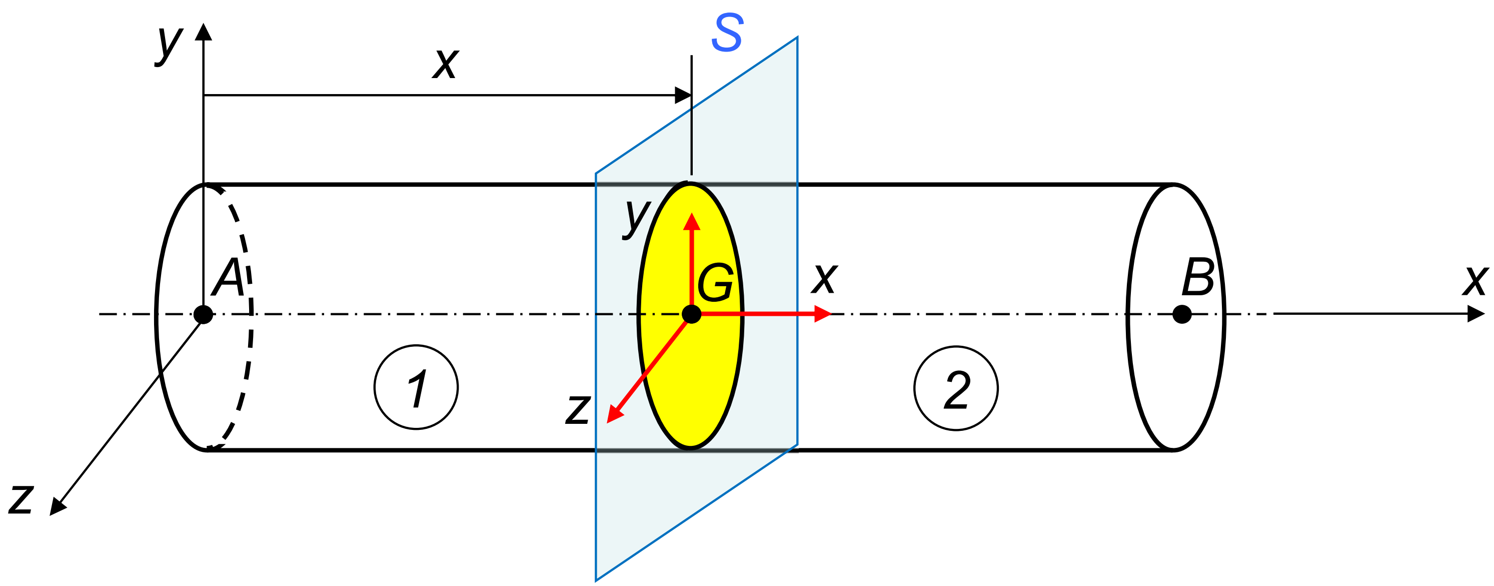
Efforts intérieurs dans les poutres : Concept de coupe fictive

Pour voir ce qui se passe à l'intérieur d'un corps, on va considérer le concept de coupe fictive : il s'agit d'une **opération formelle, abstraite** qui ne vise pas à changer l'état du corps.

On considère une poutre *AB*. Soit *S* une section droite de centre géométrique *G* repérée par son abscisse *x*. Cette **section *S* va diviser la poutre en deux tronçons fictifs** (*1*) et (*2*).

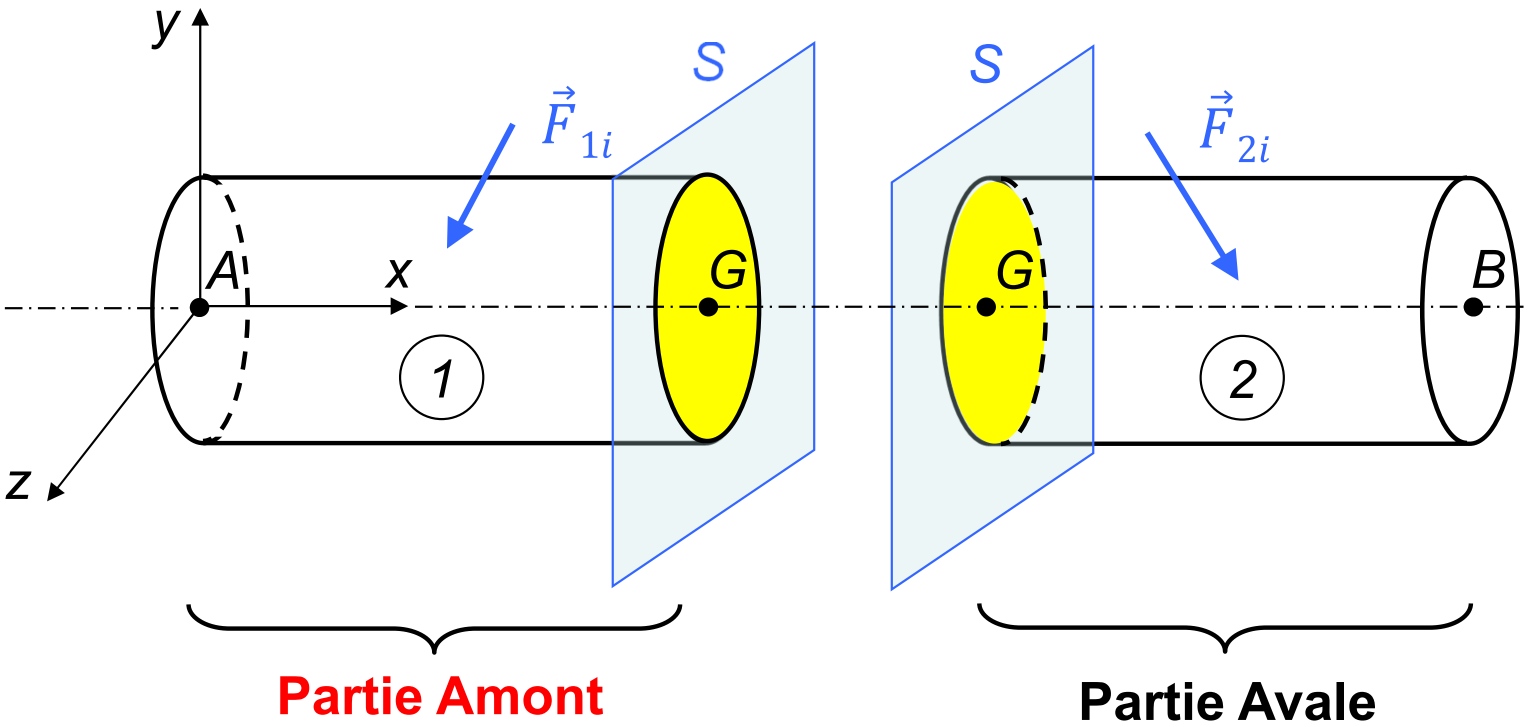
On note (*1*) le tronçon dont le volume croît lorsque *x* augmente.

D'après l'orientation de l'axe *x* : (*1*) est la partie gauche ou **partie Amont**
(*2*) est la partie droite ou **partie Avale**.



Efforts intérieurs dans les poutres :
Concept de coupe fictive

Cette coupe fictive va artificiellement séparer les deux parties de la poutre.

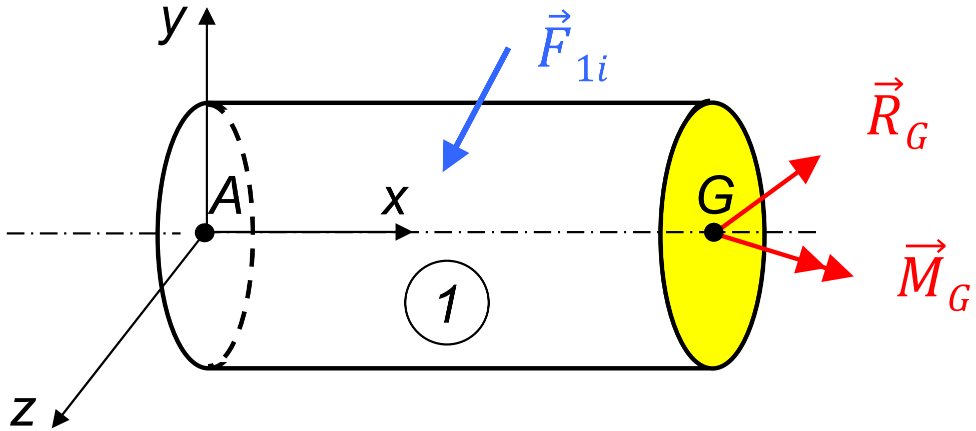


On peut alors isoler l'une des deux parties et écrire le bilan des actions mécaniques qui s'appliquent sur le tronçon.

Efforts intérieurs dans les poutres : Partie Amont

Si on isole le tronçon (*1*), celui-ci est soumis à :

- une partie des actions extérieures : $\vec{F}_{1i}$
- l'action de la partie Avale (*2*) sur la partie Amont (*1*) : $\vec{R}_G$, $\vec{M}_G$



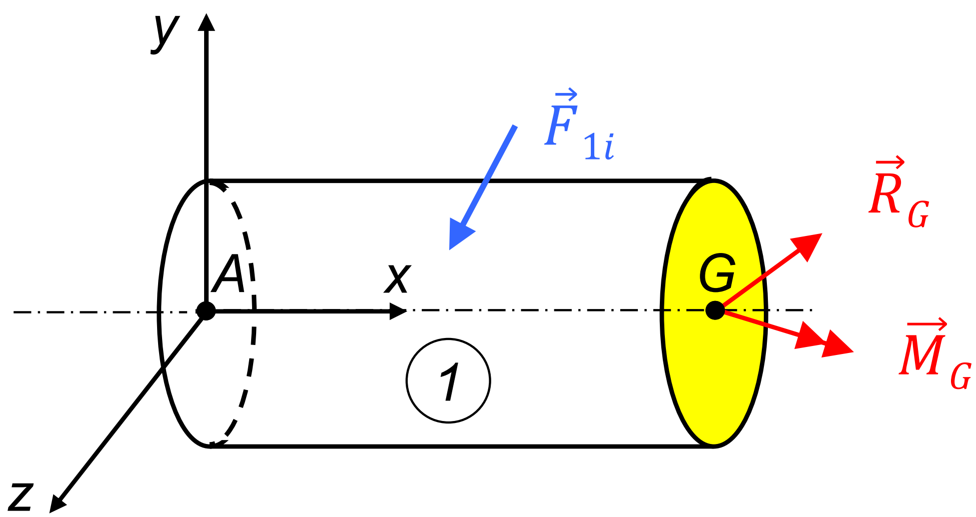
Actions mécaniques de (*2*) sur (*1*)

Principe fondamental de la statique appliqué au tronçon (*1*)

$$\vec{R}_G + \sum \vec{F}_{1i} = 0$$

$$\vec{M}_G + \sum \vec{M}_{G1i} = 0$$

Efforts intérieurs dans les poutres : Partie Amont



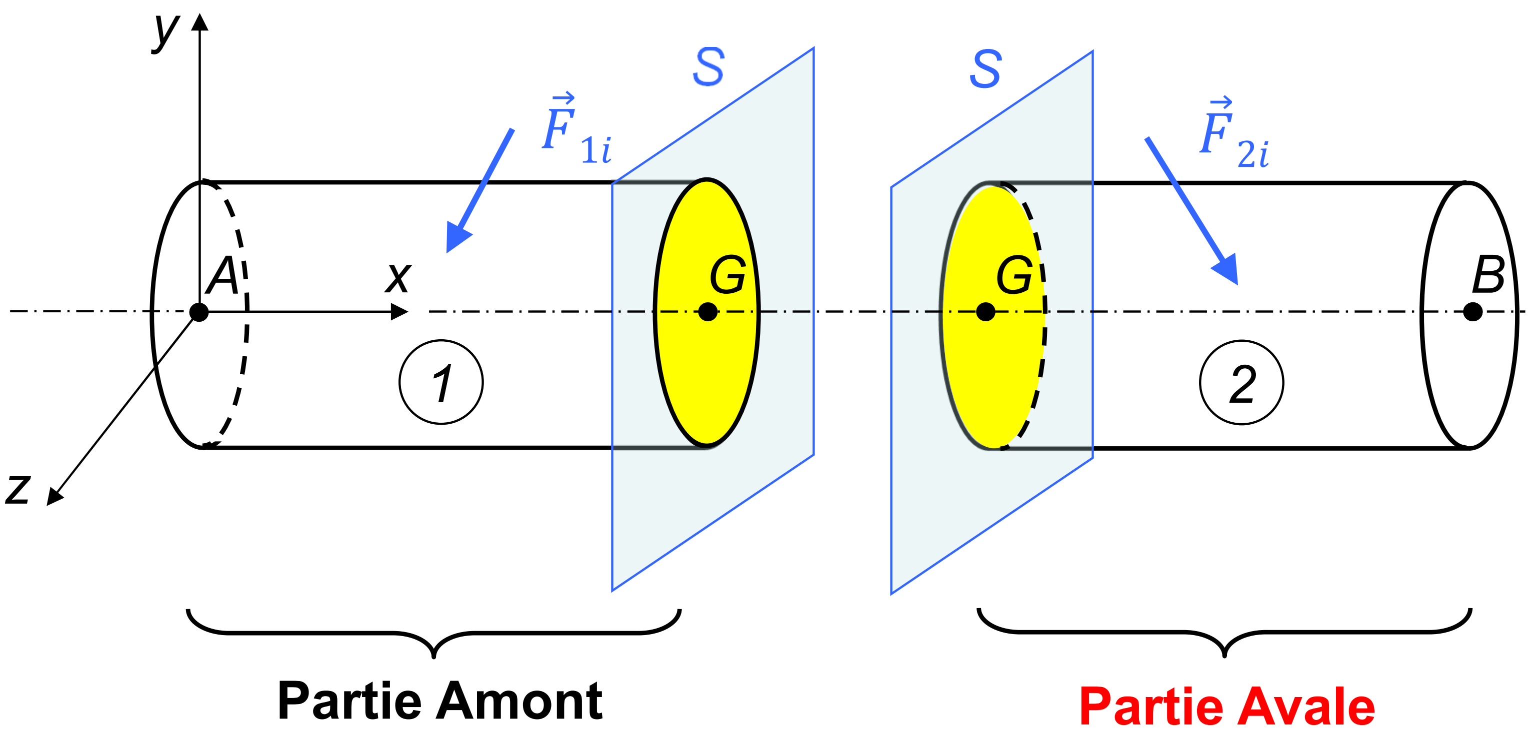
Premier moyen pour calculer les efforts intérieurs à partir des actions extérieures exercées sur le tronçon (*1*) :

$$\vec{R}_G = -\sum \vec{F}_{1i}$$

$$\vec{M}_G = -\sum \vec{M}_{G1i}$$

Efforts intérieurs dans les poutres : Concept de coupe fictive

Cette coupe fictive va artificiellement séparer les deux parties de la poutre.

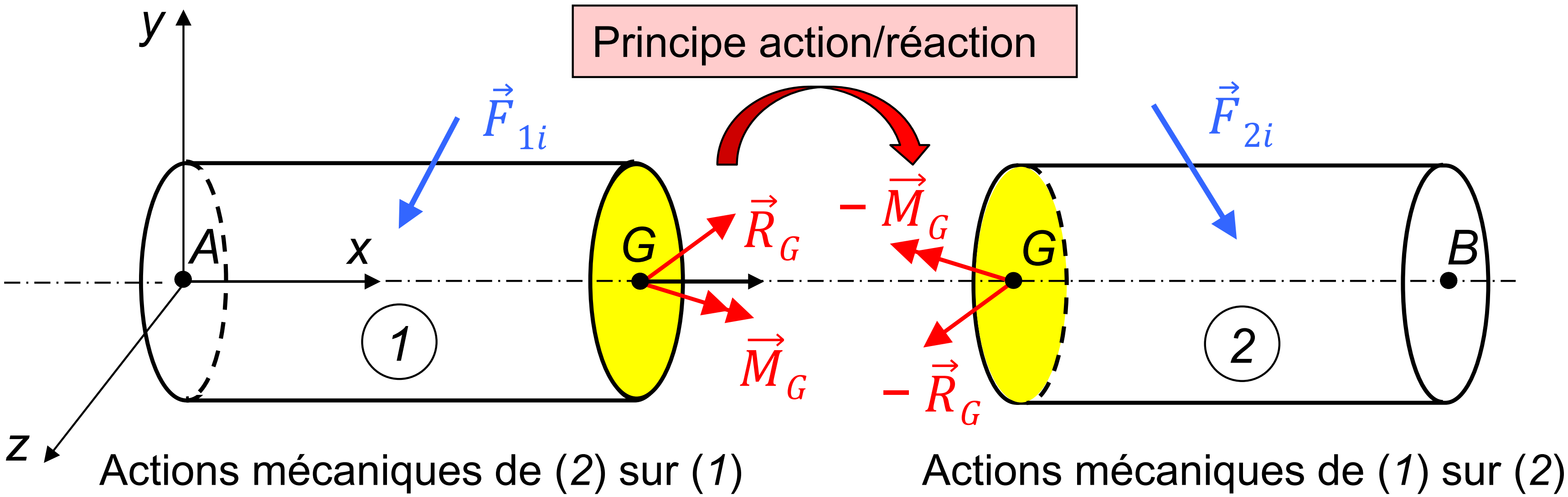


On peut alors isoler l'une des deux parties et écrire le bilan des actions mécaniques qui s'appliquent sur le tronçon.

Efforts intérieurs dans les poutres : Partie Aval

Si on isole le tronçon (*2*), celui-ci est soumis à :

- une partie des actions extérieures : $\vec{F}_{2i}$
- l'action de la partie Amont (*1*) sur la partie Avale (*2*) $-\vec{R}_G$, $-\vec{M}_G$

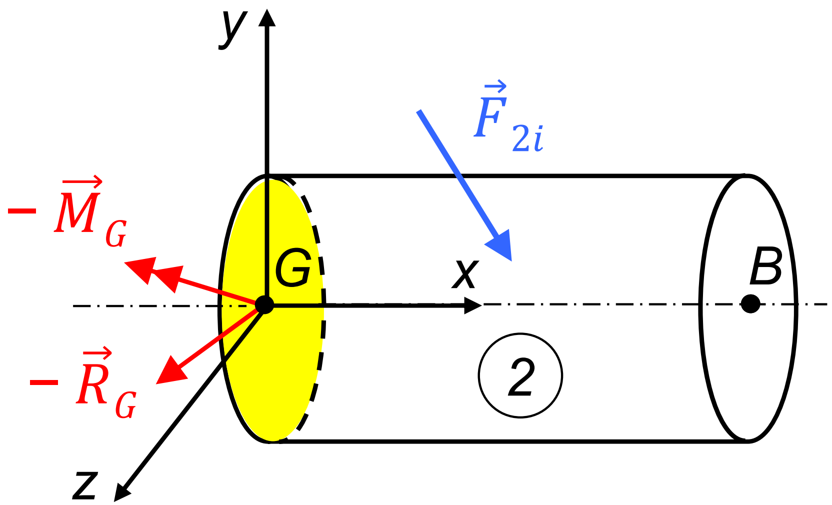


Principe fondamental de la statique appliqué au tronçon (*2*)

$$-\vec{R}_G + \sum \vec{F}_{2i} = 0$$

$$-\vec{M}_G + \sum \vec{M}_{G2i} = 0$$

Efforts intérieurs dans les poutres : Partie Aval



Actions mécaniques de (*1*) sur (*2*)

Second moyen pour calculer les efforts intérieurs à partir des actions extérieures exercées sur le tronçon (*2*) :

$$\vec{R}_G = \sum \vec{F}_{2i}$$

$$\vec{M}_G = \sum \vec{M}_{G2i}$$

Efforts intérieurs dans les poutres

Les **efforts intérieurs** peuvent donc **se déterminer de deux manières** :

- en utilisant la **partie Amont** (*1*)
- en utilisant la **partie Aval** (*2*)

Il existe souvent un choix plus judicieux que l'autre permettant de faire moins de calculs. A chaque problème correspond une approche optimale.

Les efforts intérieurs évoluent en fonction de la position de la coupe le long de la poutre. Pour une même poutre, on sera amené à faire **plusieurs coupes**, en particulier lorsque l'on rencontre :

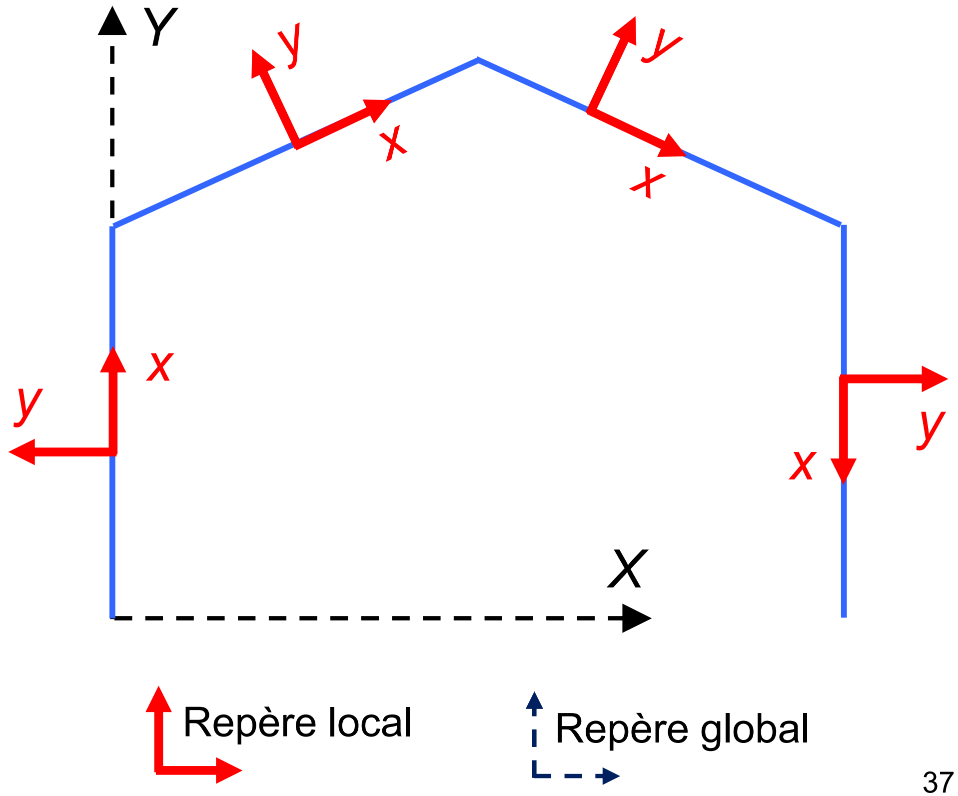
- un changement de direction de la fibre moyenne
- des charges ou des moments concentrés
- des zones de charges reparties
- des appuis

Efforts intérieurs dans les poutres

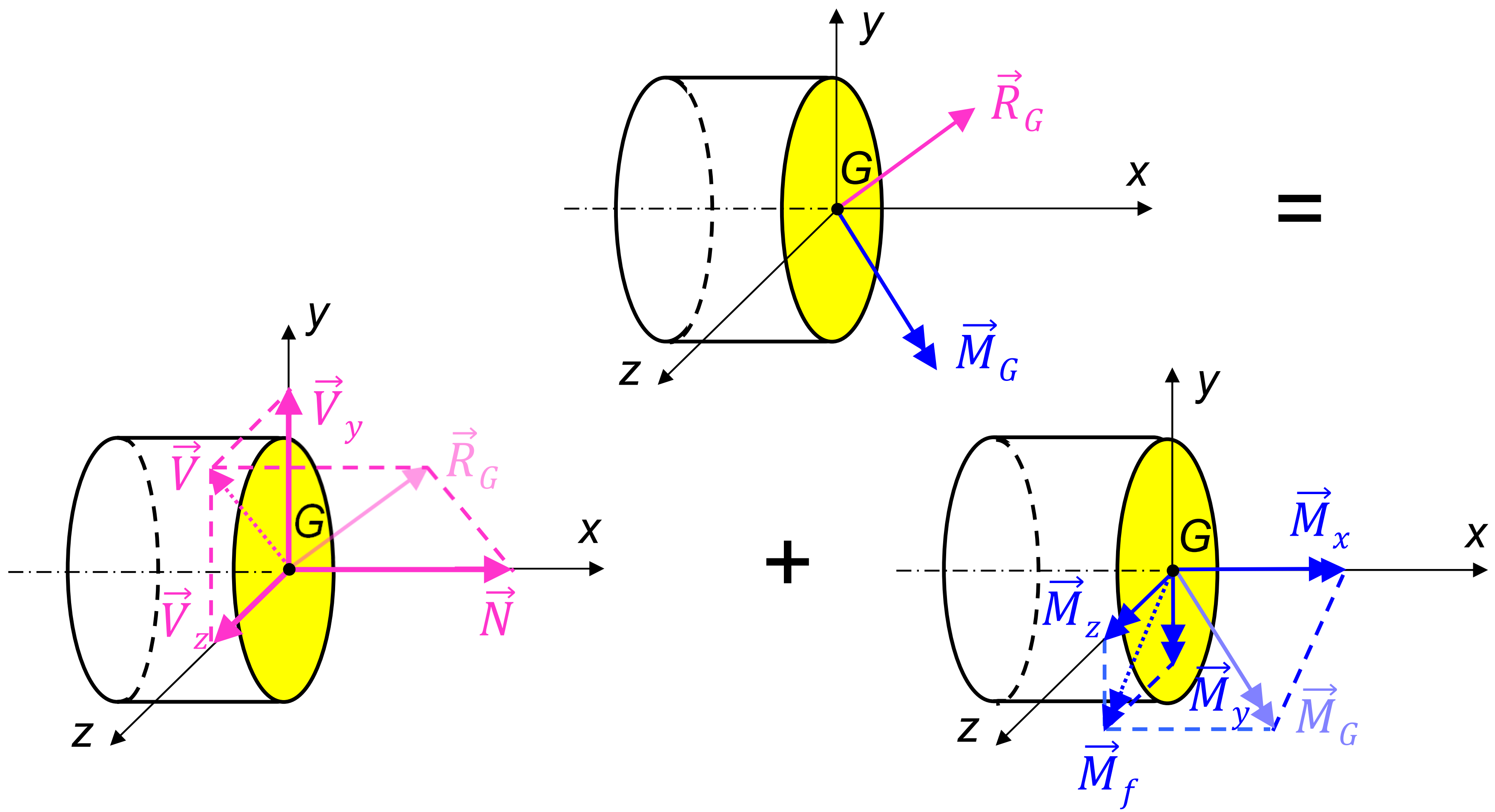
On exprime les efforts intérieurs dans le repère local à la section droite. Dans le cas d'une poutre droite, le repère global et le repère local sont confondus. Ce n'est plus le cas lorsque l'on étudie des portiques.

D'une manière générale, le **repère local** en tout point de la fibre moyenne est défini par **(*G,x,y,z*)** avec :

- ***x*** tangent à la fibre moyenne en *G*
- **(*y,z*)** deux directions perpendiculaires dans le plan de la section
- **(*x,y,z*)** trièdre direct



Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes



$\vec{R}_G$:
- ***N*** : **Effort normal** (selon *x*)
- ***V$_y$*** : **Effort tranchant** selon *y*
- ***V$_z$*** : **Effort tranchant** selon *z*

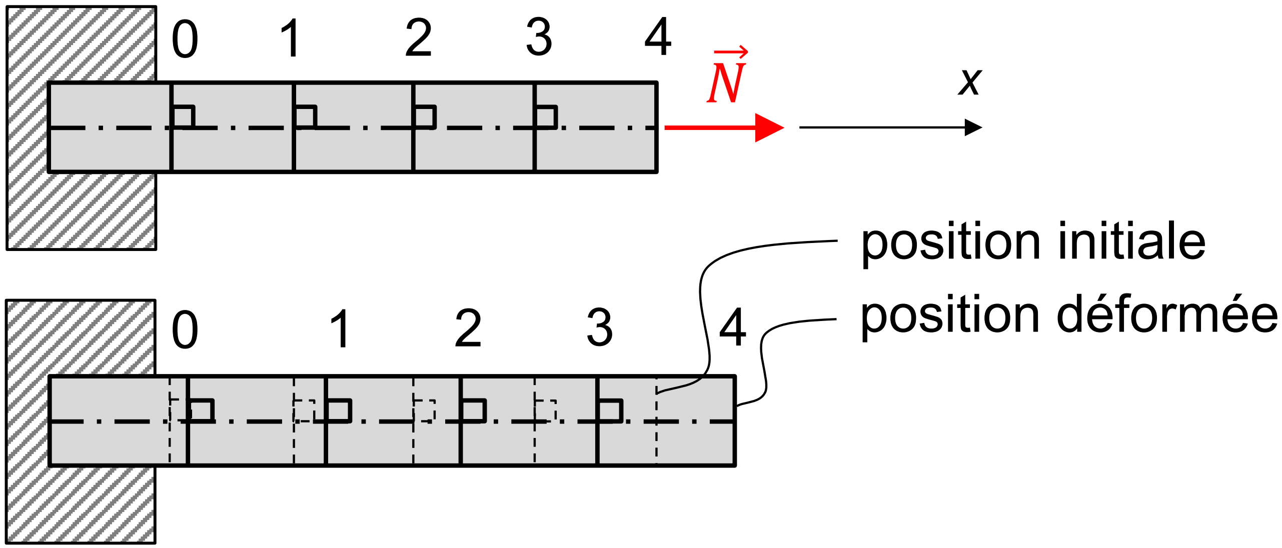
$\vec{M}_G$:
- ***M$_x$*** : **Moment de torsion** (autour de *x*)
- ***M$_y$*** : **Moment de flexion** autour de *y*
- ***M$_z$*** : **Moment de flexion** autour de *z*

Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes

N est l'**effort normal**, il agit selon la ligne moyenne (l'axe) de la poutre et perpendiculairement à la section droite.

Il est associé à un **allongement** ou à un **raccourcissement** d'ensemble de la poutre le long de sa fibre moyenne.

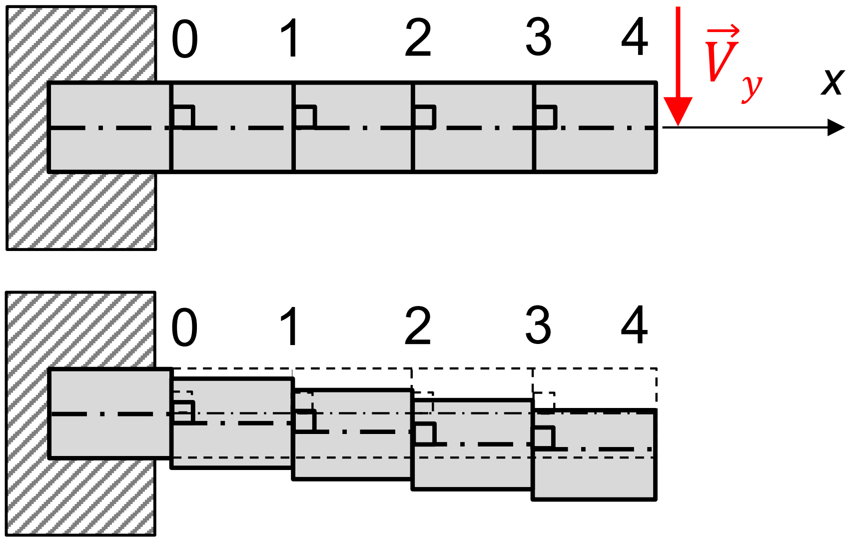
Deux sections voisines restent parallèles mais sont soit écartées, soit rapprochées.



Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes

V_y* et *V_z sont des **efforts tranchants**, ils ont tendance à **trancher** la poutre **perpendiculairement à la ligne moyenne**. Ils agissent dans le plan de la section de coupe.

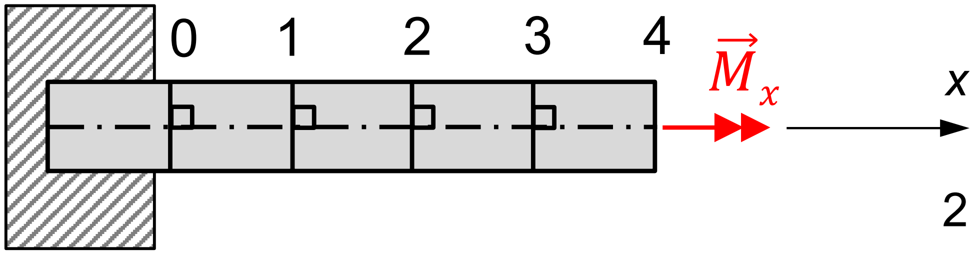
L'effort tranchant est associé à un **glissement** : deux sections voisines restent parallèles mais sont translatées l'une par rapport à l'autre dans une direction perpendiculaire à la fibre moyenne.

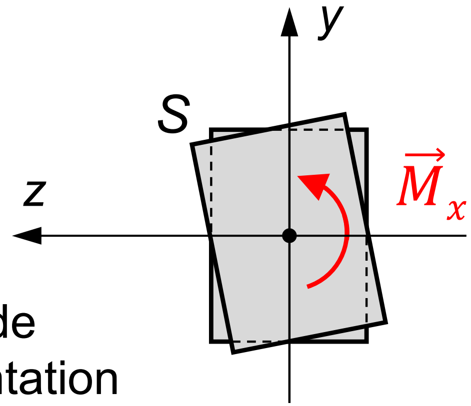


Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes

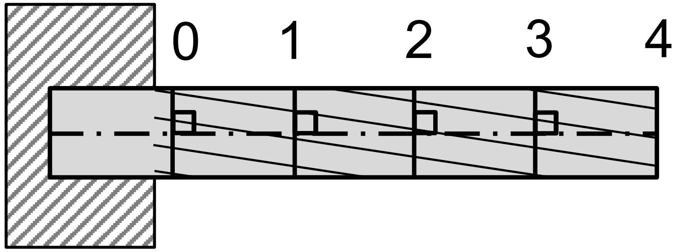
M_x est le **moment de torsion**, il a tendance à tordre la poutre autour de la fibre moyenne.

Le moment de torsion est associé à des **rotations** relatives autour de la fibre moyenne entre deux sections voisines.





2 types de représentation du vecteur

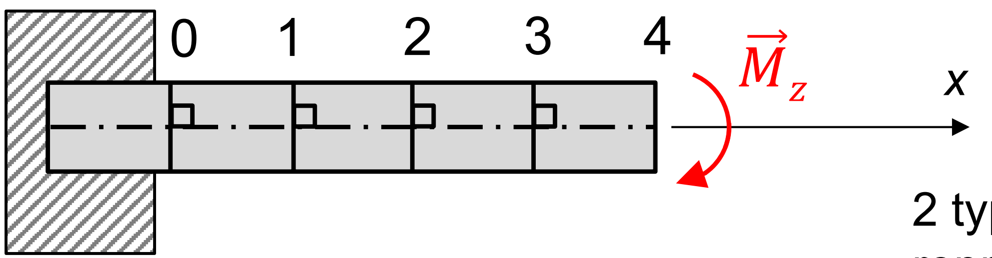


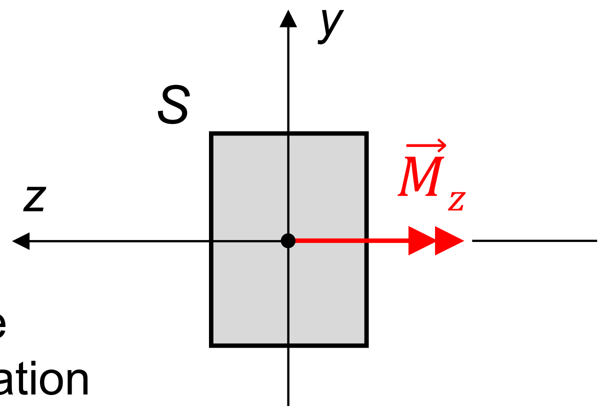
déformation en hélice

Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes

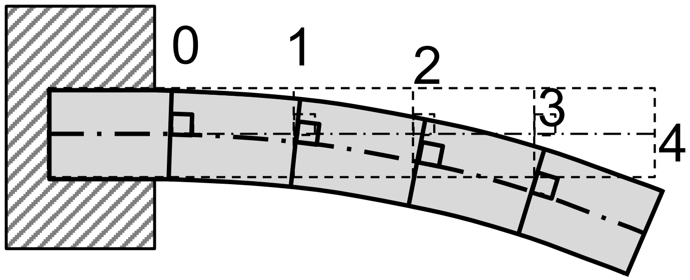
M_y et **M_z** sont des **moments de flexion**, ils ont tendance à faire **fléchir** la poutre autour d'un axe perpendiculaire à la ligne moyenne.

Le moment de flexion est associé à la **courbure** de la poutre : deux sections voisines tournent l'une par rapport à l'autre autour d'un axe perpendiculaire à la ligne moyenne.

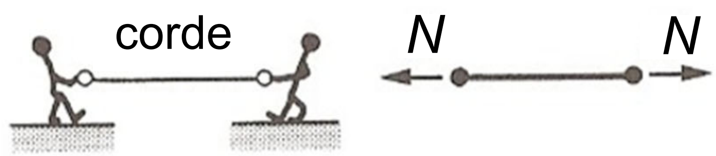
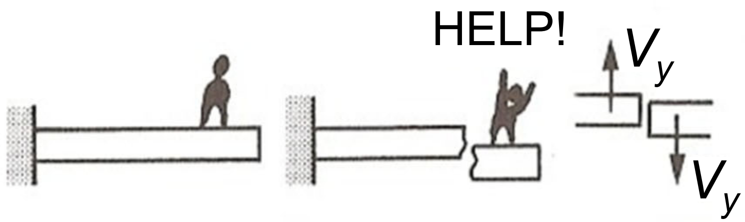
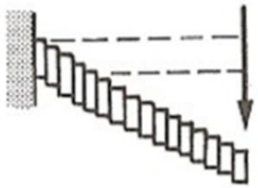
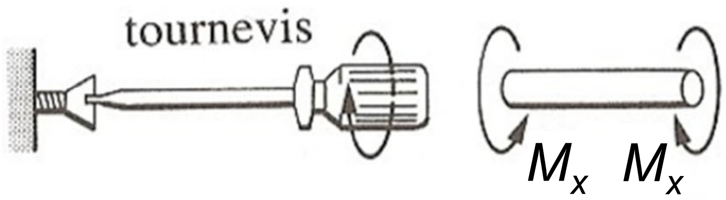
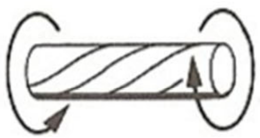




2 types de représentation du vecteur



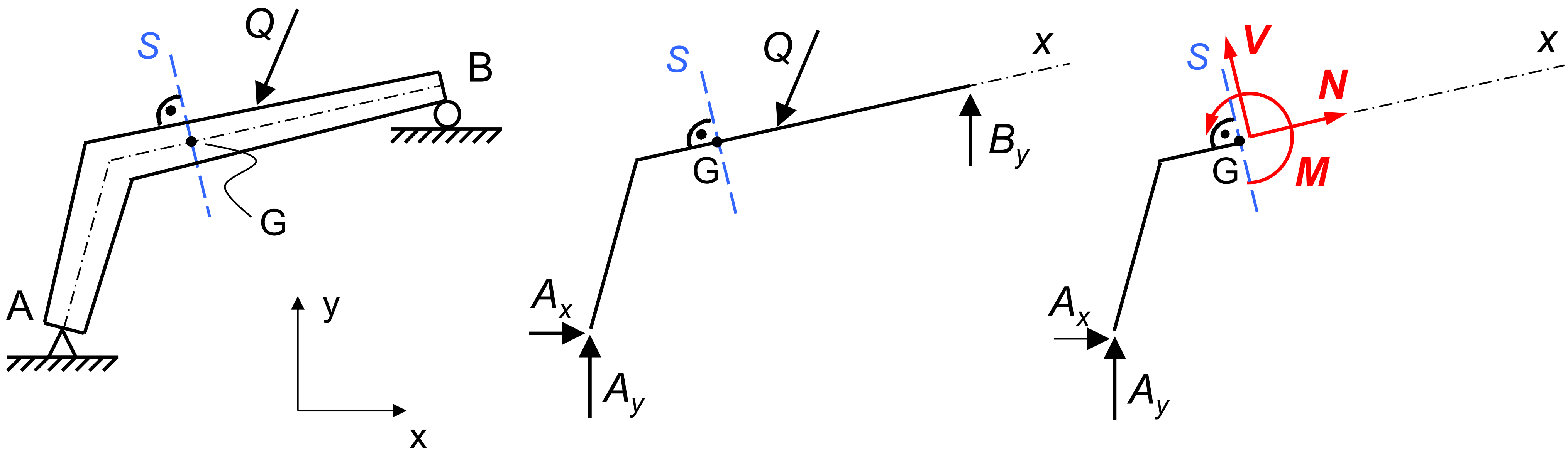
Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes

Effort intérieur	Illustration et modélisation	Déformation produite
N		allongement (traction) racourcissement (compression)
V_y, V_z		déformation transversale ou glissement 
M_x		torsion ou déformation en hélice 
M_y, M_z		courbure 

Efforts intérieurs dans les poutres : Composantes dans le plan

Efforts intérieurs dans le plan:

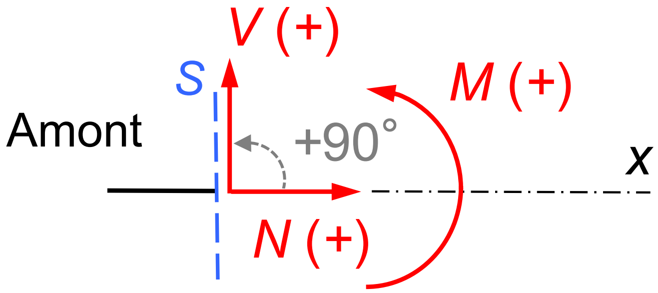
- **effort normal *N*** : tend N(+) ou comprime N(-) la poutre axialement
- **effort tranchant *V*** : tranche la poutre perpendiculairement à son axe
- **moment de flexion *M*** : fléchit, courbe l'axe de la poutre



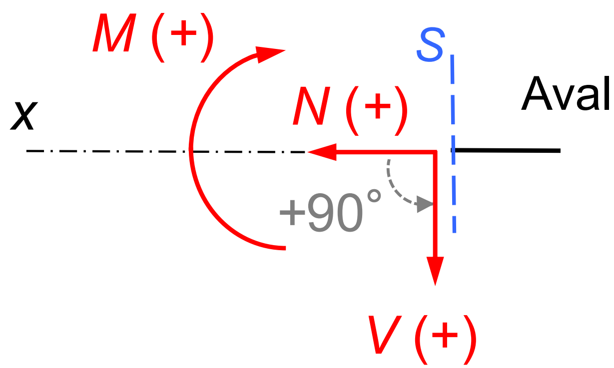
1 coupe ⇒ 3 inconnues *N*, *V*, *M* dans le plan

Efforts intérieurs dans les poutres : Convention de signe

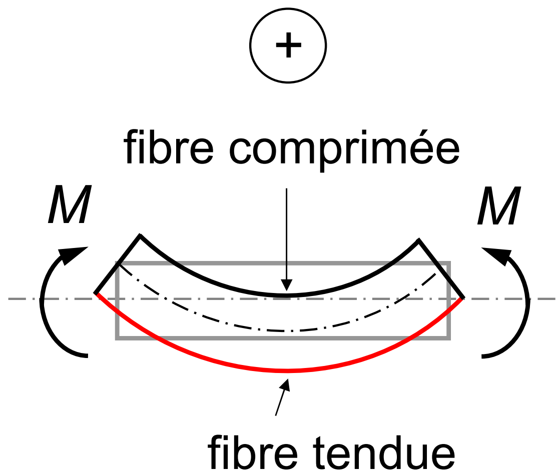
- ***N*** (+) : en traction

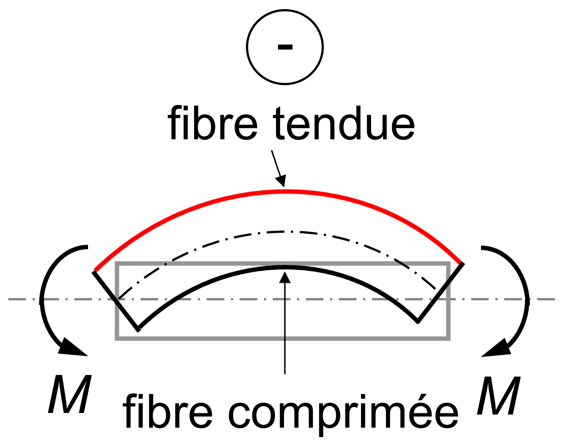


- ***V*** (+) : déduit de *N* (+) par une rotation de +90° dans le sens trigonométrique



- ***M*** (+) : traction des fibres inférieures et compression des fibres supérieures





Efforts intérieurs dans les poutres : Démarche

La démarche pour déterminer les efforts intérieurs est la suivante :

- Définir un repère global
- Ecrire le principe fondamental de la statique pour déterminer les réactions d'appui
- Définir le nombre de coupes à effectuer
- Pour chaque zone d'étude :
  - Définir si nécessaire un repère local (s'il existe des changements de directions de ligne moyenne)
  - Choisir de travailler sur la partie Amont ou Avale
  - Déterminer les efforts intérieurs *NVM* dans le repère local
- Tracer les diagrammes *NVM* et repérer les sections les plus chargées

Efforts intérieurs dans les poutres : Diagramme

Les diagrammes des efforts intérieurs permettent de tracer l'évolution de chacune des composantes en fonction de la position de la coupure le long de la fibre moyenne.

On dispose d'un certain nombre d'outils pour vérifier les résultats :

- Dans une zone de charges uniformément réparties (q) :
  - V est linéaire (fonction de degré 1 en x)
  - M est parabolique (fonction de degré 2 en x)

- Dans une zone avec une charge ponctuelle (Q) :
  - V est constant
  - M est linéaire (fonction de degré 1 en x)

- Au voisinage d'une charge concentrée (Q) ou d'une réaction d'appui (R_y) :
  - V est discontinu : le saut (en valeur) est égal à la valeur force concentrée
  - M présente une cassure