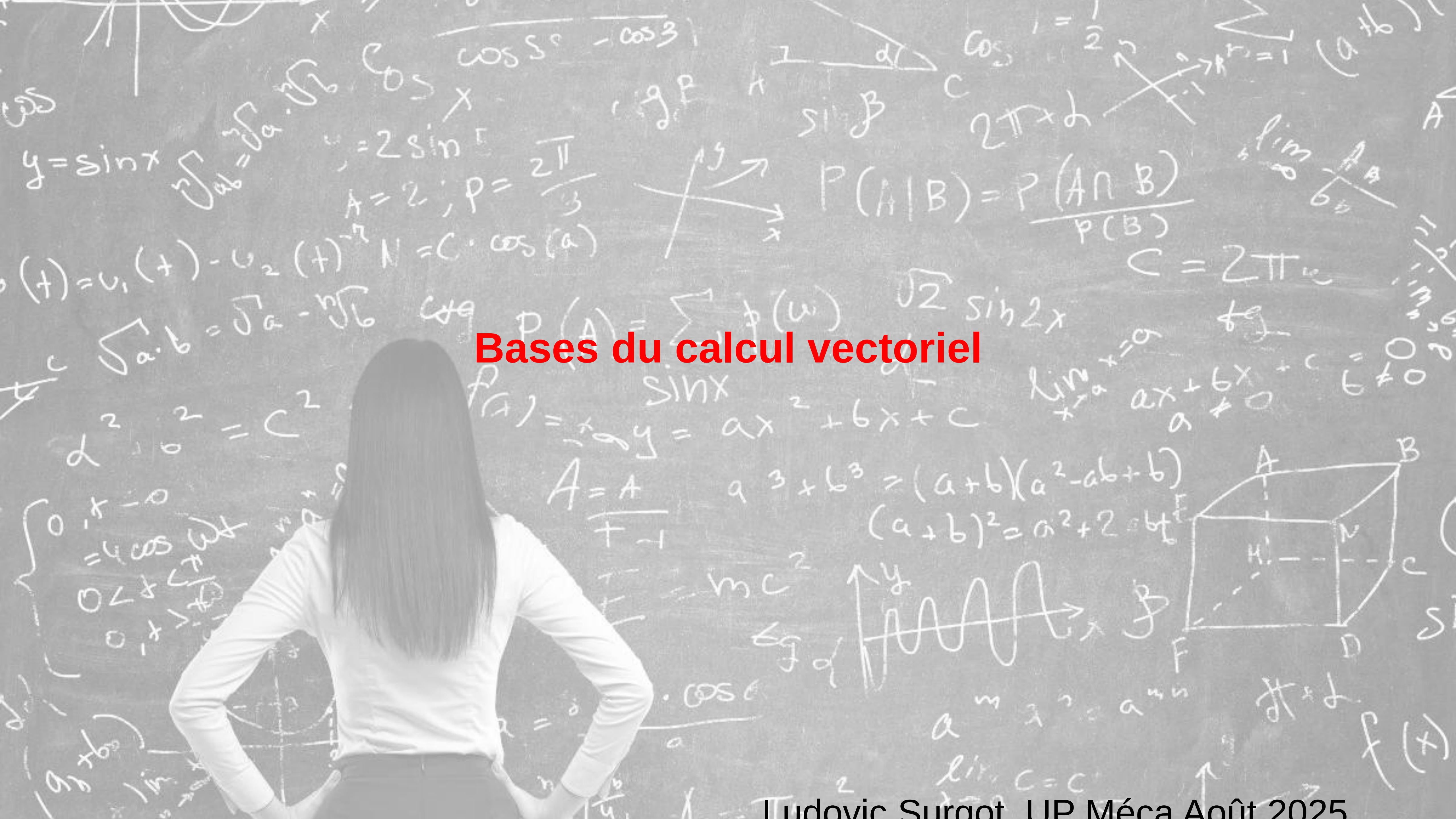


# Bases du calcul vectoriel

Ludovic Surgot, UP Méca Août 2025

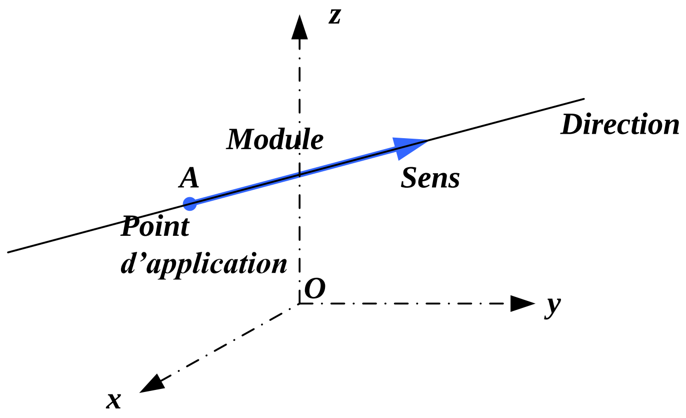
# Calcul vectoriel

## Définition d'un vecteur



Un vecteur est une grandeur définie par 4 données:

1. Un module ou une amplitude ou une norme;
2. Une direction
3. Un sens: deux sens possible sur une direction;
4. Un point d'application pour une vecteur non glissant.




Une grandeur qui ne possède qu'un module est une grandeur scalaire

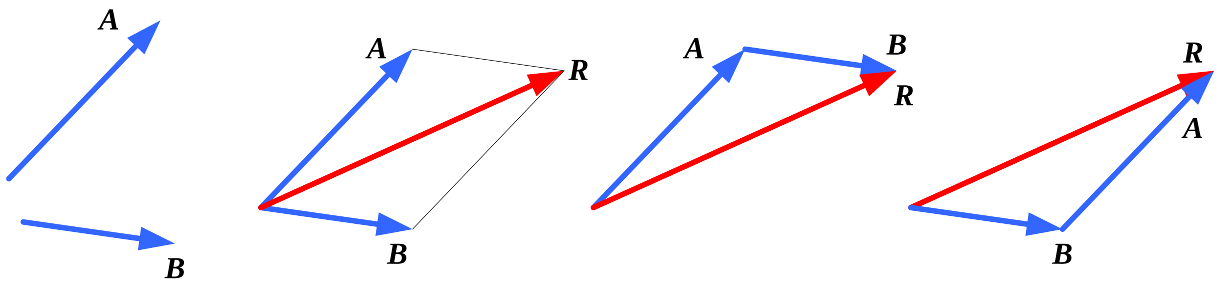
Type de vecteurs:

1. Lié (fixe): lié, attaché en un point d'application défini
2. Glissant: se déplacent sur leur support, point d'application variable sur une droite
3. Libre: a un point d'application quelconque

Des vecteurs peuvent être Coplanaires: situés dans le même plan
Concourants: dont les supports passent par un même point

**Addition**

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

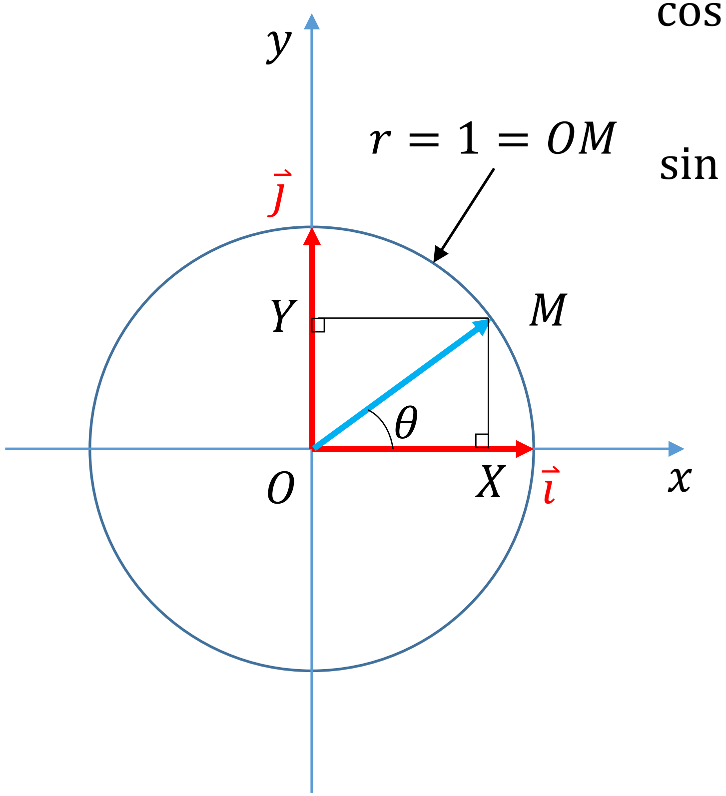



Construction graphique d'une résultante de deux vecteurs par parallélogramme ou triangle

# Rappel de trigonométrie

## Cercle trigonométrique et définitions






$$\cos\theta = \frac{Adj}{Hyp} = \frac{OX}{OM} \quad \rightarrow \quad OX = OM \cdot \cos\theta = \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{Opp}{Hyp} = \frac{OY}{OM} \quad \rightarrow \quad OY = OM \cdot \sin\theta = \sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{Opp}{Adj} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{OY}{OX}$$

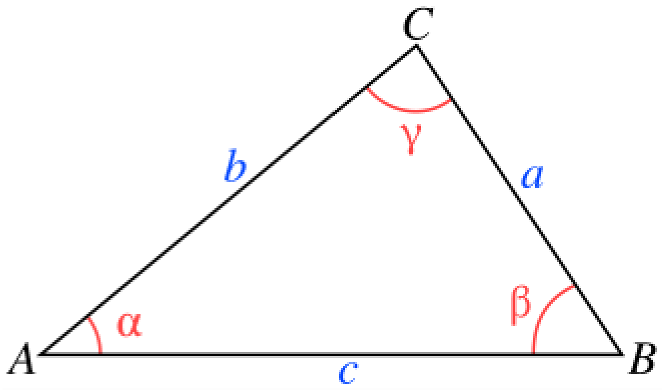
| $\theta$ | 0 | 30° $\frac{\pi}{6}$ | 45° $\frac{\pi}{4}$ | 60° $\frac{\pi}{3}$ | 90° $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $\sin\theta$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |

$$OX^2 + OY^2 = OM^2 = 1$$

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

# Rappel de trigonométrie

## Formules à connaître *( autres que Thalès et Pythagore )*

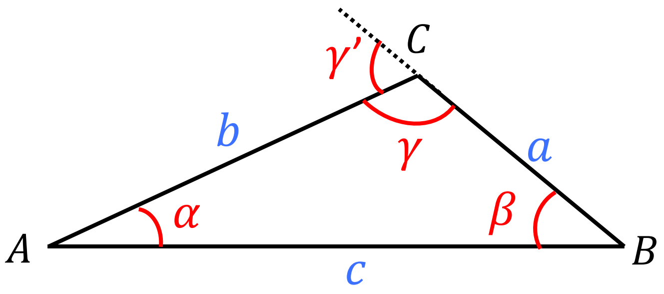



***Loi des cosinus :***

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

***Loi des sinus :***

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$




***!! Angles obtus !!***

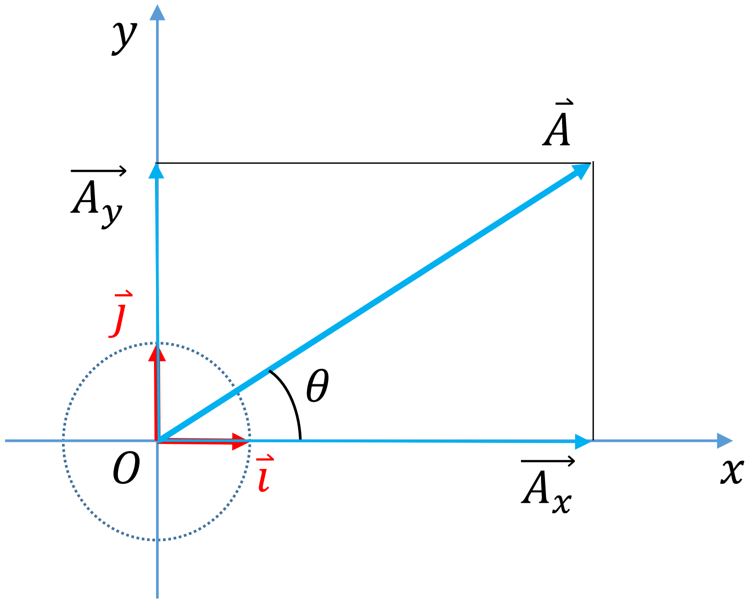
$$si\ \gamma > 90° \quad a, c\ et\ \alpha\ connus$$

La calculatrice vous donnera $\gamma' = \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\sin\alpha\right)$

$$\gamma = 180° - \gamma'$$

# Calcul vectoriel dans le plan

## Projections et module




$$\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$$

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{\imath} + A_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{A} = A \cdot \cos\theta \cdot \vec{\imath} + A \cdot \sin\theta \cdot \vec{j}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

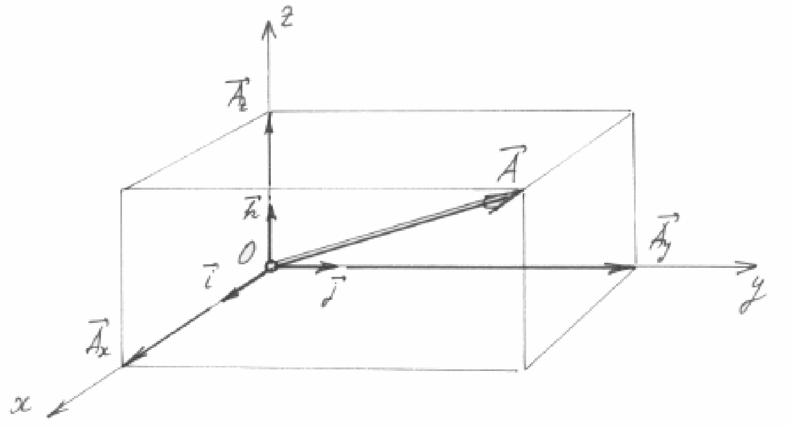
# Calcul vectoriel dans l'espace

## Projections et module

### Décomposition d'un vecteur dans un système d'axes cartésiens : projections

Tout vecteur ***A*** peut être décomposé en trois composantes définies selon un système d'axes cartésiens ***Oxyz***

***Ax, Ay, Az*** sont les trois composantes du vecteur ***A*** selon les axes ***Ox***, ***Oy*** et ***Oz*** et sont eux-mêmes des vecteurs,




### Ecriture d'un vecteur avec les vecteurs unités du système d'axes cartésiens

***i, j, k*** sont les trois vecteurs unités selon les axes ***Ox***, ***Oy*** et ***Oz*** respectivement

Le vecteur ***A*** peut s'écrire ainsi:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k} = \left\{ \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix}$$

*Ax, Ay, Az* sont ici des grandeurs scalaires

**Module** Le module de ***A*** s'écrit A:

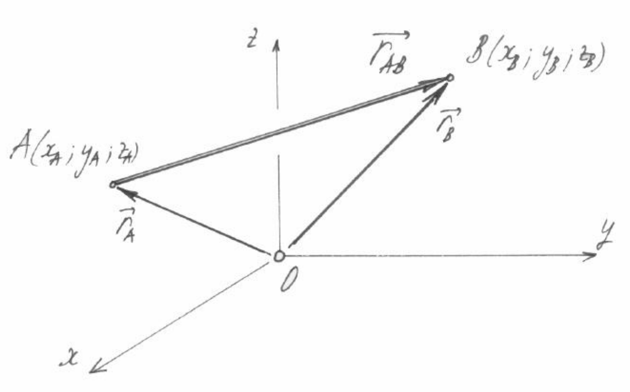
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

# Calcul vectoriel dans l'espace

## Vecteur unité

### Vecteur $r_{AB}$ liant deux points de l'espace

Calcul du vecteur entre deux points de l'espace en utilisant les coordonnées des deux points




$$\vec{r}_A + \vec{r}_{AB} = \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} + z_B \cdot \vec{k}) - (x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k})$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k} = \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\} \cdot \begin{Bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{Bmatrix} \qquad [m]$$

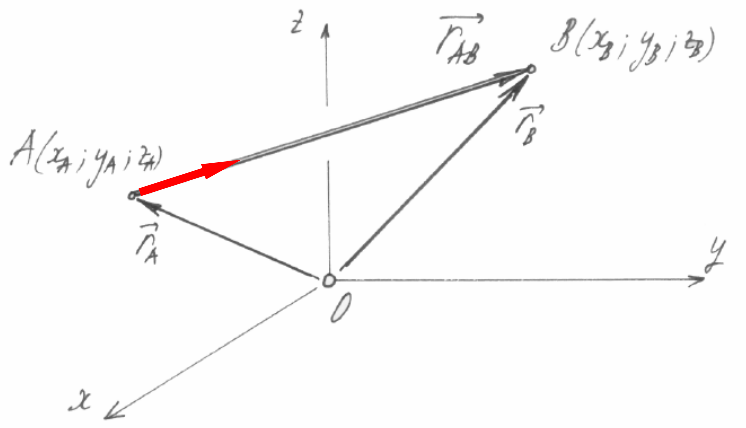
### Module du vecteur $r_{AB}$

$$\|\vec{r}_{AB}\| = r_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad [m]$$

### Vecteur unité $u_{AB}$

Un vecteur unité $\boldsymbol{u_{AB}}$, de longueur 1 (module), de même direction et de même sens est définit sur le vecteur $\boldsymbol{r_{AB}}$:

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{r_{AB}} \cdot \vec{i} + \frac{y_B - y_A}{r_{AB}} \cdot \vec{j} + \frac{z_B - z_A}{r_{AB}} \cdot \vec{k} \quad \vec{k}$$



HEIG VD

HAUTE ÉCOLE
D'INGÉNIERIE
ET DE GESTION
DU CANTON
DE VAUD