Exercices de nombres complexes pour génie électrique

Philippe Blanc

Septembre 2023

Thème : Forme cartésienne Série 1

Exercice 1

Mettre les nombres suivants sous forme cartésienne:

a) $(5+j)+(3-4j)\,,$

b) $(2+j)+(2-j)\,,$

c) $j(1+j)\,,$

d) $(5+4j)(5-3j)\,,$

e) $(3-j)(3+j)\,,$

f) $\dfrac{1}{2+j}\,,$

g) $\dfrac{7-j}{2+j}\,,$

h) $(5-2j)^2\,,$

i) $(1-j)^3\,.$

Exercice 2

Calculer j^n pour $n=1,2,3,\dots$ et en déduire la valeur de j^{131}, j^{1001} et j^{2023}.

Exercice 3

Mettre les expressions suivantes sous forme cartésienne:

a) $\dfrac{(1+3j)(5-j)}{(1-j)(2-\sqrt{3}j)}\,,$

b) $\dfrac{1}{(1+j)^3}\,,$

c) $\dfrac{1}{j^{17}}\,.$

Exercice 4

Calculer $\big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\big)^n$ pour $n=1,2,\dots$

Exercice 5

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$ tels que $b^2-4ac<0$. Montrer que

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{4ac-b^2}\,j}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-\sqrt{4ac-b^2}\,j}{2a}$$

sont racines de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Exercice 6

Soient $z_1=2+3j$, $z_2=-1+2j$, $z_3=-3-j$ et $z_4=j$. Calculer:

a) $z_1+z_2+z_3\,,$

b) $2z_1-\dfrac{3}{2}z_4\,,$

c) $z_1\,z_2\,z_3\,,$

d) $\dfrac{z_2}{z_3}\,,$

e) $z_1\,z_2^*\,,$

f) $z_3\,z_3^*\,.$

Exercice 7

Soit z un nombre complexe de module 1 tel que $\mathrm{Im}(z)\neq 0$. Montrer que le nombre $(z-1)(z^*+1)$ est purement imaginaire.

Thème : Plan complexe Série 2

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes:

a) $(4-j)\,z = 2+j\,,$ b) $z^2 - 2z + 10 = 0\,,$ c) $z^3 + z = 0\,.$

Exercice 2

Soit $z = \sqrt{2}(1+j)$.

a) Calculer les parties réelle et imaginaire de z, z^2, z^3 et z^4.

b) Calculer le module de z, z^2, z^3 et z^4.

c) Représenter z, z^2, z^3 et z^4 dans le plan complexe.

Exercice 3

Soit $z = 2+j$. Représenter les nombres suivants dans le plan complexe:

a) $z\,,$ b) $j\,z\,,$ c) $-z\,,$ d) $\dfrac{z}{j}\,,$ e) $\dfrac{1}{z}\,.$

Exercice 4

Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points z tels que

a) $\operatorname{Im} z > 0\,,$ b) $|z| = 2\,,$ c) $|z-j| = 1\,.$

Exercice 5

Pour quels nombres complexes les égalités suivantes ont-elles lieu?

a) $z^2 = |z|^2\,,$ b) $|z^2| = |z|^2\,,$ c) $z^2 = -|z|^2\,.$

Exercice 6

Représenter dans le plan complexe l'ensemble des nombres qui satisfont la relation $|z-1| = |z+j|\,.$

Exercice 7

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$. Pour $z \neq 1$ calculer $(1-z)S$ et en déduire une formule permettant le calcul de S.

Exercice 8

Calculer

$$1 + \frac{1}{2}\,j + \left(\frac{1}{2}\,j\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,j\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\,j\right)^8$$

et

$$1 + \frac{1}{2}\,j + \left(\frac{1}{2}\,j\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,j\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\,j\right)^k + \ldots$$

et mettre le résultat sous forme cartésienne.

Thème : Forme polaire Série 3

Exercice 1

a) Utiliser le schéma de Horner pour vérifier que $2+j$ est une racine du polynôme
$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5\,.$$

b) Vérifier que $2-j$ est aussi une racine de p et donner les autres racines.

Exercice 2

Déterminer les nombres complexes qui vérifient les relations suivantes:

a) $j|z| = z^*\,,$

b) $z^* = -\dfrac{1}{z}\,,$

c) $j + \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = z\,,$

d) $(2+j)z + (2-j)z^* = 0\,,$

e) $z^2 = \left(z^*\right)^2,$

f) $|z^*| = 2|z| - 1\,.$

Exercice 3

Représenter dans le plan complexe les nombres satisfaisant les conditions suivantes:

a) $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 2\,,$

b) $|z^2| - 5|z| + 6 \leqslant 0\,.$

Exercice 4

Écrire les nombres complexes suivants sous forme polaire:

a) $-1+j\,,$

b) $-2j\,,$

c) $2-4j\,,$

d) $\dfrac{2}{5}(\sqrt{3}-j)\,,$

e) $\dfrac{j-1}{j+1}\,,$

f) $-7\,,$

g) $-1-j\,,$

h) $(1+j)^3\,.$

Exercice 5

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants:

a) $8\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right),$

b) $-3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - j\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right),$

c) $2-\sqrt{5}\,,$

d) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) - j\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right),$

e) $j\cos\left(\dfrac{6\pi}{7}\right),$

f) $\sin(1) + j\cos(1)\,.$

Exercice 6

Calculer et donner le résultat sous forme cartésienne:

a) $\left(2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right)\left(11\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + j\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)\right),$

b) $(1-\sqrt{3}j)^5\,,$

c) $(1-\sqrt{3}j)^5 - (1-\sqrt{3}j)^4\,,$

d) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}j}{1-\sqrt{3}j}\right)^{10}.$

Thème : Forme polaire Série 4

Exercice 1

Soient $z_1 = 1 + \sqrt{3}j$, $z_2 = 1 - j$ et $z_3 = -2\sqrt{3} - 2j$.

a) Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme polaire.

b) Donner la forme polaire des nombres suivants:

1) $z_1\, z_2\, z_3$, 2) $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3) $z_1^2\, z_2^2\, z_3^3$, 4) $z_1^2\, z_2 + z_3^2$.

Exercice 2

Représenter les ensembles suivants dans le plan complexe:

a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid 0 \leqslant \operatorname{Arg}(z) \leqslant \dfrac{\pi}{3} \right\}$.

b) $B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 2 \leqslant |z - (1+2j)| \leqslant 3 \right\}$.

c) $C = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid 0 \leqslant \operatorname{Arg}(z) \leqslant \dfrac{\pi}{4} ,\ 1 \leqslant |z-1| \leqslant 2 \right\}$.

Exercice 3

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $|\operatorname{Arg}(z_i)| < \dfrac{\pi}{2}$ pour $i = 1$ et 2. Exprimer $\operatorname{Arg}(z_1 + z_2)$ à l'aide de $|z_1|$, $|z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1)$ et $\operatorname{Arg}(z_2)$.

Exercice 4

a) Représenter l'ensemble $A = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid \dfrac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{Arg}(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2} ,\ 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \right\}$ dans le plan complexe.

b) Existe-t-il $z \in A$ tel que $z^2 \in A$?

Exercice 5

Représenter dans le plan les nombres complexes qui satisfont la relation $|z| = \dfrac{6}{\pi}\operatorname{Arg}(z)$.

Exercice 6

Pour $\alpha \in]-\pi, \pi]$ on pose $z = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$. Pour quelles valeurs de α le nombre z satisfait-il les conditions suivantes?

a) $|z| = 1$, c) $\operatorname{Im}(z^3) < 0$, e) $z^3 = -1$,

b) $\operatorname{Re}(z^2) > 0$, d) $\operatorname{Re}(z^*) < 0$, f) $\operatorname{Arg}(z^2) < \dfrac{\pi}{2}$.

Thème : Forme exponentielle Série 5

Exercice 1

Mettre les nombres suivants sous forme cartésienne:

a) $e^{j\frac{\pi}{4}}$, b) $e^{-j\frac{\pi}{3}}$, c) $e^{-j\frac{\pi}{2}}$, d) $e^{j\frac{19\pi}{4}}$, e) $e^{-j\frac{8\pi}{3}}$.

Exercice 2

Mettre les nombres suivants sous forme exponentielle:

a) $1+j\sqrt{3}$, b) $-1-j$, c) $-\sqrt{3}-j$, d) -1, e) $-j$.

Exercice 3

Soient $z_1 = 2.1\,e^{0.2\,j}$ et $z_2 = 0.75\,e^{-0.4\,j}$.

a) Calculer $|z_i|$, $\mathrm{Arg}\,(z_i)$, $\mathrm{Re}\,(z_i)$ et $\mathrm{Im}\,(z_i)$ pour $i = 1$ et 2.

b) Calculer $z_1\,z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^2, z_2^2 et $z_1^2 z_2^2$.

Exercice 4

Déterminer les module et argument des nombres $\dfrac{e^{j\frac{\pi}{7}}}{1-j}$ et $\dfrac{j}{6\,e^{j}}$.

Exercice 5

a) Donner le nombre $e^{j163\pi}$ sous forme cartésienne.

b) Donner le nombre $e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{j\frac{\pi}{4}}$ sous forme cartésienne.

c) Considérons le nombre $z = \dfrac{(-1-\sqrt{3}) + j(-1+\sqrt{3})}{1+j}$.

   i) Exprimer z sous forme cartésienne.

   ii) Calculer z^9 et simplifier.

Exercice 6

Mettre le nombre $z = 6 - 8j$ sous forme exponentielle puis calculer z^6.

Thème : Linéarisation, exponentielle et logarithme complexe Série 6

Exercice 1

Écrire $2\cos^3(x) + 4\sin(x)\cos^2(x)$ sous forme d'un polynôme trigonométrique.

Exercice 2

Écrire $8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$ sous forme d'un polynôme trigonométrique.

Exercice 3

Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 4

a) Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.

b) Déduire de a) la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [-1, 1]$ on pose

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)).$$

a) Vérifier que $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Simplifier l'expression de $T_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big((x + j\sqrt{1-x^2})^n + (x - j\sqrt{1-x^2})^n\Big).$$

Exercice 6

Calculer les parties réelle et imaginaire de $w = e^{jz}$ où $z = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 7

Donner toutes les solutions des équations suivantes:

a) $e^z = -1$, b) $e^{jz} = 1 + j$, c) $e^{4z} = 1 + \sqrt{3}j$.

Exercice 8

Donner les nombres suivants sous forme cartésienne:

a) $\operatorname{Ln}(-1 + j)$, b) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + j)$, c) $\operatorname{Ln}(-1 - \sqrt{3}j)$.

Exercice 9

L'égalité $2\operatorname{Ln}(-1 + j) = \operatorname{Ln}\big((-1 + j)^2\big)$ a-t-elle lieu?

Thème : Oscillations harmoniques Série 7

Exercice 1

Écrire la fonction $f(t) = 2\cos(4t) + 2\sqrt{3}\cos(4t - \frac{\pi}{2})$ sous la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Exercice 2

Écrire la fonction $f(t) = 2\cos(3t + \frac{\pi}{3}) + 7\cos(3t - \frac{\pi}{4})$ sous la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Exercice 3

Écrire la fonction $f(t) = 5\sin(3t + \frac{\pi}{6}) - 4\sin(3t - \frac{\pi}{3})$ sous la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$.

Exercice 4

Écrire la fonction $f(t) = 3\cos(2t - \frac{\pi}{4}) + 7\sin(2t - \frac{\pi}{6})$ sous la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.

Exercice 5

Considérons les oscillations harmoniques

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2\sin(\omega t + \pi/3), \\ y_2(t) &= 2\sqrt{3}\sin(\omega t + \pi/4), \\ y(t) &= (2\sqrt{3} - 2)\sin(\omega t + \pi). \end{aligned}$$

Après avoir exprimé sous forme rectangulaire les amplitudes complexes de ces oscillations, déterminer les nombres réels λ_1 et λ_2 pour lesquels

$$\lambda_1\, y_1(t) + \lambda_2\, y_2(t) = y(t).$$

Exercice 6

Quelle est l'oscillation harmonique qui résulte de la superposition de N oscillations harmoniques de même amplitude et de même pulsation et dont les phases diffèrent de $\frac{2\pi}{N}$?
En d'autres termes on demande de simplifier l'expression

$$\sum_{k=0}^{N-1} A\cos(\omega t + \phi + \frac{2k\pi}{N}).$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(t) = e^{(-1+j)t}$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

a) Déterminer les fonctions $\rho(t) = |f(t)|$ et $\theta(t) = \mathrm{Arg}(f(t))$ et esquisser leur graphe.

b) Représenter la trajectoire de f.

Thème : Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes Série 8

Exercice 1

Soit z la fonction à valeurs complexes définie par $z(t) = \underline{A}e^{at}$ où $\underline{A} = -2 + 3j$ et $a = -\frac{1}{2} + 5j$.

a) Calculer $|z(t)|$ et $\arg(z(t))$.

b) Représenter la trajectoire de z dans le plan complexe.

c) Quelle est la partie imaginaire de $z(t)$?

Exercice 2

Simplifier l'expression

$$1 + e^{j\frac{\pi}{9}} + e^{j\frac{2\pi}{9}} + e^{j\frac{3\pi}{9}} + e^{j\frac{4\pi}{9}} + e^{j\frac{5\pi}{9}} + e^{j\frac{6\pi}{9}} + e^{j\frac{7\pi}{9}} + e^{j\frac{8\pi}{9}}$$

et donner sa valeur sous forme cartésienne.

Exercice 3

Simplifier les expressions

$$1 + a\,e^{j\frac{\pi}{9}} + a^2\,e^{j\frac{2\pi}{9}} + a^3\,e^{j\frac{3\pi}{9}} + a^4\,e^{j\frac{4\pi}{9}} + a^5\,e^{j\frac{5\pi}{9}} + a^6\,e^{j\frac{6\pi}{9}} + a^7\,e^{j\frac{7\pi}{9}} + a^8\,e^{j\frac{8\pi}{9}} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}$$

et

$$1 + r\,e^{j\frac{\pi}{9}} + r^2\,e^{j\frac{2\pi}{9}} + r^3\,e^{j\frac{3\pi}{9}} + r^4\,e^{j\frac{4\pi}{9}} + \ldots + r^k\,e^{j\frac{k\pi}{9}} + \ldots \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |r| < 1$$

puis donner leur valeur sous forme cartésienne.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(t) = -1 + (1 + j)t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les fonctions $x(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(f(t))$ et esquisser leur graphe.

b) Déterminer les fonctions $\rho(t) = |f(t)|$ et $\theta(t) = \mathrm{Arg}(f(t))$ et esquisser leur graphe.

c) Représenter la trajectoire de f.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{1 + jt}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer les fonctions $\rho(t) = |f(t)|$ et $\theta(t) = \mathrm{Arg}(f(t))$ et esquisser leur graphe.

b) Représenter la trajectoire de f.

Thème : Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes Série 9

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,2]$ telle que

$$|f(t)| = t + |t-1| \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}(f(t)) = \frac{\pi}{8}\Big(1 + t - |t-1|\Big) \quad \text{pour} \quad t \in [0,2]\,.$$

a) Esquisser les graphes du module et de l'argument de f.

b) Esquisser la trajectoire de f.

Exercice 2

Esquisser la trajectoire de la fonction f définie par $f(t) = \mathrm{Ln}(1 + jt)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Esquisser la trajectoire de la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{t-3}{t+j}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Esquisser la trajectoire de la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{t+j}{t-3}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit la fonction de transfert

$$H = \frac{(j\omega)^3}{1 + 2j\omega + 2(j\omega)^2 + (j\omega)^3}$$

Calculer un argument de H en fonction de $\omega > 0$.

Exercice 6

Soient f_1 et f_2 les fonctions définies par $f_1(t) = A\cos(\omega t)$ et $f_2(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ où $A > 0$ et $\phi \in]-\pi, \pi]$.

a) Écrire $f_1 + f_2$ sous la forme $A_3 \cos(\omega t + \phi_3)$.

b) Pour quelles valeurs de ϕ l'inégalité $A_3 \leqslant A$ a-t-elle lieu?

Exercice 7

Pour $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ on pose $f_k(t) = r^k \cos(\omega t + \dfrac{2k\pi}{N})$ où $0 < r < 1$.

Écrire la fonction $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f_k(t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \phi)$.

Thème : Racines énièmes Série 10

Exercice 1

Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(w) \neq 0$. Vérifier que

$$z = \sqrt{\frac{|w| + \mathrm{Re}(w)}{2}} + j\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}(w))\sqrt{\frac{|w| - \mathrm{Re}(w)}{2}}$$

où $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ est une racine carrée de w. Quelle est l'autre racine carrée de w?

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes:

a) $z^2 - 6z + 34 = 0,$

b) $z^2 - 6jz + 34 = 0,$

c) $z^2 - 11z + 29 + 3j = 0,$

d) $z^2 - (10 + 2j)z + 15 + 10j = 0.$

Exercice 3

Calculer les racines cinquièmes de 32 et représenter ces racines dans le plan complexe.

Exercice 4

Donner les racines de l'équation $z^4 + \dfrac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ sous forme cartésienne.

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{C}$ et soient $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les racines énièmes de a. Simplifier les expressions suivantes:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k\,,$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k^2\,,$

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k\,.$

Exercice 6

Soient $\epsilon_k = e^{j\frac{2k\pi}{n}}$ où $k = 0, 1, \dots, n-1$ les racines énièmes de l'unité. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\epsilon_k\,.$

Exercice 7

Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 \leqslant 0$ et soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^3 = -\dfrac{q}{2} + j\sqrt{-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{q}{2}\right)^2}$.
Montrer que $w + w^*$ est une racine de l'équation $z^3 + pz + q = 0\,.$

Exercice 8

Utiliser le résultat de l'exercice 7 pour résoudre les équations suivantes:

a) $z^3 - 91z + 330 = 0\,,$

b) $z^3 - 6z + 4 = 0\,.$

Thème : Polynômes Série 11

Exercice 1

Soit p le polynôme défini par $p(z) = z^3 - (6-2j)z^2 - (12+3j)z + 45 + 25j$.

a) Vérifier que $2+j$ est une racine de p.

b) Donner les autres racines de p.

Exercice 2

Soit p le polynôme défini par $p(z) = z^4 + z^3 + 8z^2 - 8z + 40$.

a) Vérifier que $1 - j\sqrt{3}$ est une racine de p.

b) Donner un polynôme à coefficients réels de degré 2 qui est un diviseur de p.

c) Écrire le polynôme p comme un produit de deux polynômes à coefficients réels.

Exercice 3

Écrire les polynômes suivants sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1 ou 2 à coefficients réels:

a) $x^3 - 1$, b) $x^5 - 32$, c) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

Exercice 4

Montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.

Exercice 5

Soit a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ où $a \neq 0$ et soit p le polynôme défini par $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$. On désigne ses racines par z_1, z_2 et z_3. Exprimer les quantités suivantes à l'aide des coefficients de p:

a) $z_1 + z_2 + z_3$,

b) $z_1\,z_2 + z_1\,z_3 + z_2\,z_3$,

c) $z_1\,z_2\,z_3$,

d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Exercice 6

Montrer que le polynôme $p(z) = z^3 + 2z^2 + 3z - 17$ a au moins une racine de partie imaginaire négative.
Indication : Utiliser le point d) de l'exercice 5.

Thème : Fonctions de la variable complexe à valeurs complexes Série 12

Exercice 1

Préciser la nature des transformations géométriques associées aux fonctions suivantes :

a) $f(z) = (1-j)z + 3j$,

b) $g(z) = -2jz + 6 + j$.

Exercice 2

Quelle est la transformation géométrique dont le point fixe est $-j$ et qui envoie le point $1+j$ sur le point -2?

Exercice 3

Déterminer les fonctions complexes correspondant aux rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ et qui envoient le point $-4-j$ sur le point $1-2j$.

Exercice 4

Déterminer la fonction affine f qui transforme le segment AB d'extrémités $-1+2j$ et $2+2j$ en le segment $A'B'$ d'extrémités $1-j$ et $2-j$.

Exercice 5

Quelle est l'image du carré de sommets $\pm 1 \pm j$ par la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$?

Exercice 6

Quelle est l'image du rectangle $\mathcal{R}$ de sommets 0, 1, $1 + j\frac{\pi}{4}$, $j\frac{\pi}{4}$ par la fonction $f(z) = e^z$?
En déduire l'image du rectangle $\mathcal{R}$ par la fonction $g(z) = je^z$.

Exercice 7

Comment la fonction z^2 transforme-t-elle les droites horizontales et verticales du plan complexe?