Cours de nombres complexes pour génie électrique

Philippe Blanc

Septembre 2023

Nombres complexes

On appelle nombre complexe sous forme cartésienne[1] une expression du type $a+bj$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et j satisfait $j^2=-1$.
L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Terminologie

a) On dit que j est l'unité imaginaire.[2]

b) On dit que a est la partie réelle de $a+bj$ et on écrit $\Re(a+bj)=a$ ou $\mathrm{Re}(a+bj)=a$.
Ainsi $\mathrm{Re}(3+7j)=3$.

c) On dit que b est la partie imaginaire de $a+bj$ et on écrit $\Im(a+bj)=b$ ou $\mathrm{Im}(a+bj)=b$.
Ainsi $\mathrm{Im}(3+7j)=7$.

d) Le nombre $z=a+0j$ s'écrit $z=a$ et on dit que z est réel.

e) Le nombre $z=0+bj$ où $b\neq 0$ s'écrit $z=bj$ et on dit que z est purement imaginaire.

Remarque
On dit que $a+bj=c+dj$ si et seulement si $a=c$ et $b=d$.

Opérations sur $\mathbb{C}$

Soient $z=a+bj$ et $w=c+dj$ où $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ et soit encore $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose

$$z+w=a+c+(b+d)j,$$

$$z-w=a-c+(b-d)j$$

et

$$\alpha z=\alpha a+\alpha bj.$$

Pour calculer zw, on développe $(a+bj)(c+dj)$ en considérant cette expression comme un polynôme en j et on utilise $j^2=-1$. On a donc

$$(a+bj)(c+dj)=ac+adj+bcj+bdj^2=ac-bd+(ad+bc)j.$$

Ainsi $(2+3j)(3+j)=6+2j+9j+3j^2=3+11j$.

Pour définir la division de deux nombres complexes, on commence par introduire la notion d'inverse.

Proposition
Soit $z=a+bj\in\mathbb{C}^\star$ où $\mathbb{C}^\star=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Alors il existe un unique nombre $w\in\mathbb{C}^\star$ tel que $zw=1$. Le nombre w, appelé l'inverse de z et noté $\dfrac{1}{z}$, est donné par

$$w=\frac{a-bj}{a^2+b^2}.$$

[1] La justification de ce terme apparaîtra plus loin dans ce cours.

[2] Bien que les mathématiciens désignent l'unité imaginaire par la lettre i, elle sera systématiquement notée j dans ce cours.

Démonstration
On va chercher $x, y \in \mathbb{R}$ de sorte que $w = x + yj$ satisfasse $zw = 1$. Les égalités

$$\begin{cases} \mathrm{Re}((a+bj)(x+yj)) & = & 1 \\ \mathrm{Im}((a+bj)(x+yj)) & = & 0 \end{cases}$$

conduisent au système

$$\begin{cases} ax - by & = & 1 \\ bx + ay & = & 0\,. \end{cases}$$

Ce dernier a pour unique solution

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \ \text{ et } \ y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

et il en résulte que

$$w = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,j = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bj)$$

que l'on écrit souvent sous la forme

$$w = \frac{a-bj}{a^2+b^2}. \qquad \square$$

Dans $\mathbb{R}$ diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse, cette même règle s'applique dans $\mathbb{C}$. Pour $c + dj \in \mathbb{C}^\star$ on pose donc

$$\frac{a+bj}{c+dj} = (a+bj)\,\frac{1}{c+dj} = (a+bj)\frac{c-dj}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)j}{c^2+d^2}.$$

Ainsi

$$\frac{3+4j}{2+11j} = (3+4j)\frac{2-11j}{4+121} = \frac{50-25j}{125} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}j.$$

Remarque
On vérifie aisément que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont commutatives i.e. $z + w = w + z$ et $zw = wz$. De plus la multiplication est distributive par rapport à l'addition i.e. $z(v + w) = zv + zw$.

Conjugué

Définition
Soit $z = a + bj$. On appelle conjugué de z le nombre noté $z^\star$ ou $\bar{z}$ défini par

$$z^\star = a - bj.$$

Exemples

a) $(3 + 7j)^\star = 3 - 7j$,

b) $(1 - 4j)^\star = 1 + 4j$,

c) $2^\star = (2 + 0j)^\star = 2 - 0j = 2$,

d) $j^\star = (0 + j)^\star = 0 - j = -j$.

Proposition
Soient $z, w \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

a) $(z^\star)^\star = z$,

b) $(z + w)^\star = z^\star + w^\star$,

c) $(z - w)^\star = z^\star - w^\star$,

d) $(\alpha z)^\star = \alpha z^\star$,

e) $(zw)^\star = z^\star w^\star$.

De plus si $w \neq 0$ alors

f) $\left(\dfrac{1}{w}\right)^\star = \dfrac{1}{w^\star}$,

g) $\left(\dfrac{z}{w}\right)^\star = \dfrac{z^\star}{w^\star}$.

Démonstration

a) $((a + bj)^\star)^\star = (a - bj)^\star = (a + (-bj))^\star = a - (-bj) = a + bj$,

b) $((a + bj) + (c + dj))^\star = (a + c + (b + d)j)^\star = a + c - (b + d)j = a - bj + c - dj = (a + bj)^\star + (c + dj)^\star$,

c) $((a + bj) - (c + dj))^\star = (a - c + (b - d)j)^\star = a - c - (b - d)j = a - bj - (c - dj) = (a + bj)^\star - (c + dj)^\star$,

d) $(\alpha(a + bj))^\star = (\alpha a + \alpha bj)^\star = \alpha a - \alpha bj = \alpha(a - bj) = \alpha(a + bj)^\star$,

e) $((a+bj)(c+dj))^\star = (ac-bd+(ad+bc)j)^\star = ac-bd-(ad+bc)j = (a-bj)(c-dj) = (a+bj)^\star(c+dj)^\star$.

f) Par définition de l'inverse on a $w\,\dfrac{1}{w} = 1$ et donc $\left(w\,\dfrac{1}{w}\right)^\star = 1^\star = 1$.
On déduit alors du point e) que $w^\star \left(\dfrac{1}{w}\right)^\star = 1$ et il en résulte que $\left(\dfrac{1}{w}\right)^\star = \dfrac{1}{w^\star}$.

g) En faisant usage des points e) et f) on a successivement

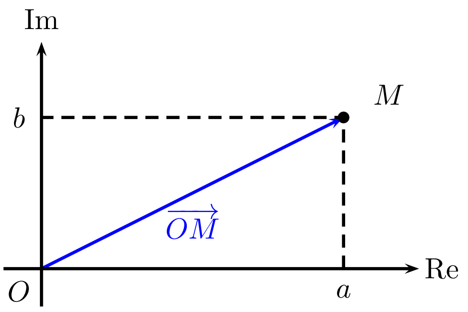
$$\left(\frac{z}{w}\right)^\star = \left(z\,\frac{1}{w}\right)^\star = z^\star \left(\frac{1}{w}\right)^\star = z^\star\,\frac{1}{w^\star} = \frac{z^\star}{w^\star}. \quad \square$$

Remarque
À l'aide du conjugué on peut exprimer les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. On vérifie facilement que

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^\star}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^\star}{2j}.$$

Plan complexe

Au nombre complexe $z = a + bj$ on fait correspondre le point $M(a, b)$ du plan complexe, aussi appelé plan de Gauss ou plan d'Argand, comme indiqué dans la figure ci-dessous. Le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes, c'est la raison pour laquelle $a + bj$ est appelée forme cartésienne.



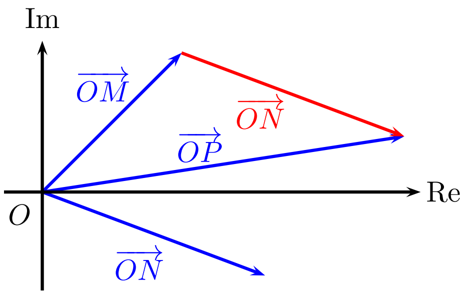
On dit que le point M est l'image ponctuelle du nombre z et que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image vectorielle du nombre z.

Remarques

a) Soient $z = a+bj$ et $w = c+dj$ et soient encore $z+w = a+c+(b+d)j$ et $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OP}$ les images vectorielles de z, w et $z+w$. On observe que

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$$

et il en résulte qu'à l'addition de deux nombres complexes correspond l'addition vectorielle des images vectorielles. Cette propriété se généralise à la somme de plusieurs nombres complexes.



b) On montre de même qu'à la soustraction de deux nombres complexes correspond la soustraction des images vectorielles et qu'à la multiplication d'un nombre complexe par un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ correspond la multiplication de l'image vectorielle par α.

c) Étant donné un point $M(a, b)$ du plan complexe, les mathématiciens appellent affixe du point $M(a, b)$ le nombre complexe $z = a + bj$. En ingénierie, on se permet de confondre un nombre complexe et son image ponctuelle de sorte qu'on parle du nombre z ou du point z. Nous n'utiliserons pas la notion d'affixe dans ce cours.

d) Les points z et $z^\star$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Module

Définition

Soit $z = a + bj$. On appelle module de z le nombre positif ou nul noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{zz^\star} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

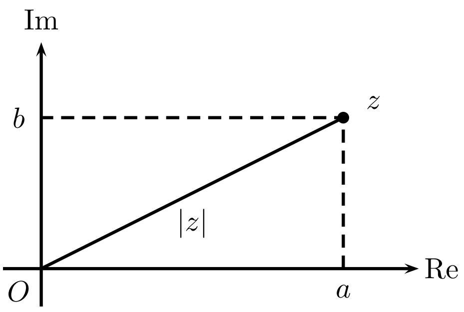
Exemples

a) $|1+2j| = \sqrt{5}$,

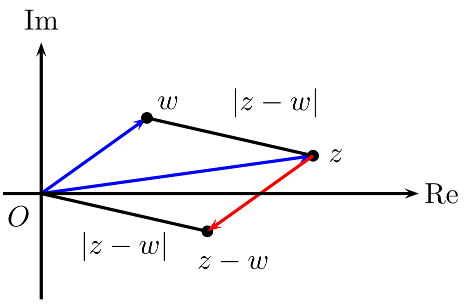
b) $|-2j| = |0-2j| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Remarques

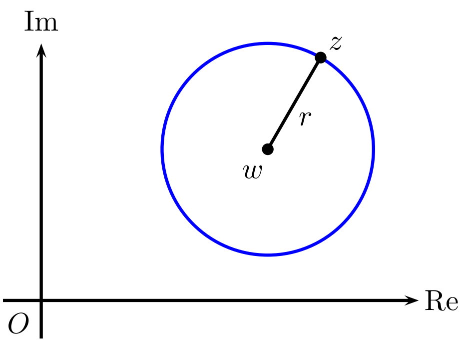
a) Le module du nombre z est la distance entre l'origine et le point z.



b) Étant donné deux nombres z et w, le nombre $|z-w|$ est la distance entre le point w et le point z.



c) Étant donné un nombre $w \in \mathbb{C}$ et un nombre réel $r \geqslant 0$, l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-w| = r$ forme un cercle de rayon r centré en w.



d) Si $z = a + 0j$ alors $|z| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ et donc module et valeur absolue coïncident pour un nombre réel.

e) Pour $z \in \mathbb{C}^\star$ on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{z^\star}{z^\star} = \frac{z^\star}{z\,z^\star} = \frac{z^\star}{|z|^2}$$

ce qui permet de calculer facilement l'inverse d'un nombre complexe.

Proposition

a) $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$,

b) $|z^\star| = |z|$,

c) $|zw| = |z|\,|w|$,

d) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

De plus si $w \neq 0$ alors

e) $\left|\dfrac{1}{w}\right| = \dfrac{1}{|w|}$,

f) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

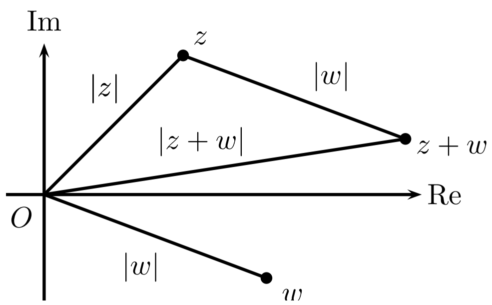
Démonstration

a) $|a + bj| = 0$ si et seulement si $a^2 + b^2 = 0$ et donc si et seulement si $a = b = 0$,

b) $|(a + bj)^\star| = |a - bj| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bj|$,

c) $|zw| = \sqrt{zw(zw)^\star} = \sqrt{zwz^\star w^\star} = \sqrt{zz^\star ww^\star} = \sqrt{zz^\star}\sqrt{ww\star} = |z|\,|w|$,

d) C'est une conséquence du fait que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure (ou égale pour un triangle dégénéré) à la somme des longueurs des deux autres côtés.



e) Par définition de l'inverse on a $w\,\dfrac{1}{w} = 1$ et donc $\left|w\,\dfrac{1}{w}\right| = |1| = 1$.

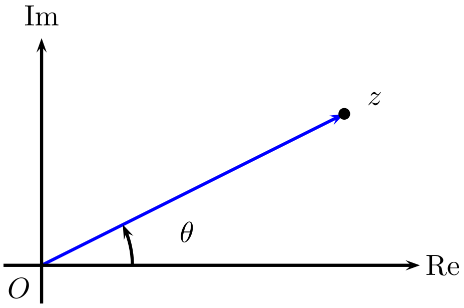
On déduit alors du point c) que $|w|\left|\dfrac{1}{w}\right| = 1$ et il en résulte que $\left|\dfrac{1}{w}\right| = \dfrac{1}{|w|}$,

f) En faisant usage des points c) et e) on a successivement

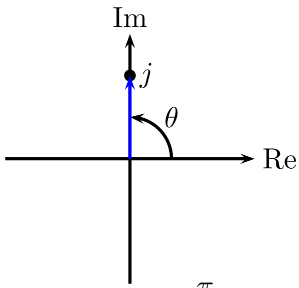
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z\,\frac{1}{w}\right| = |z|\,\left|\frac{1}{w}\right| = |z|\,\frac{1}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}. \quad \square.$$

Argument

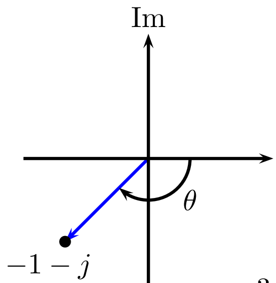
Définition
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On appelle argument principal de z la mesure en radian, comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, de l'angle orienté θ entre le demi-axe des nombres réels positifs et l'image vectorielle de z. L'argument principal de z se note $\mathrm{Arg}(z)$.



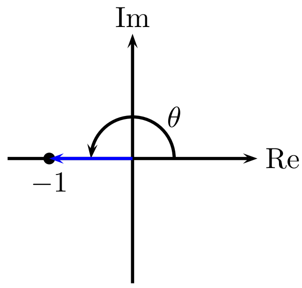
Exemples



a) $\operatorname{Arg}(j) = \dfrac{\pi}{2}$,



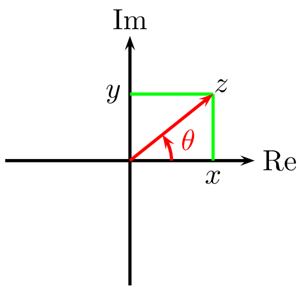
b) $\operatorname{Arg}(-1-j) = -\dfrac{3\pi}{4}$,

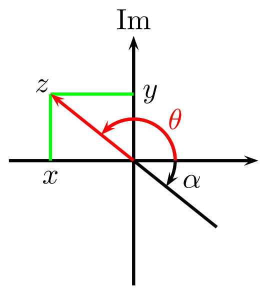


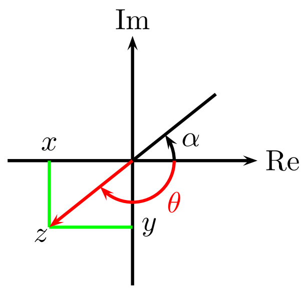
c) $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$.

Calcul de l'argument

Dans cette partie du cours, on va exprimer l'argument principal d'un nombre complexe à l'aide des fonctions Arctangente et Arccosinus.
Soient $z = x + jy \in \mathbb{C}^*$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.







Les figures ci-dessus font le lien, lorsque x est non nul, entre θ et $\alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$. Lorsque $x = 0$ et $y > 0$ on a $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ et lorsque $x = 0$ et $y < 0$ on a $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$. En résumé

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si} \quad x < 0 \quad \text{et} \quad y < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y < 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y > 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si} \quad x < 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0. \end{cases}$$

Exemples

a) $\operatorname{Arg}(1+j\sqrt{3}) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$,

b) $\operatorname{Arg}(-3+5j) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{-3}\right) + \pi = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{3}\right) + \pi$ et l'on s'arrête là car $\operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{3}\right)$ ne s'exprime pas comme un multiple rationnel de π,

c) $\operatorname{Arg}((\sqrt{2}-\sqrt{3})j) = -\frac{\pi}{2}$ car $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$.

On observe que $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ et on en déduit que

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} -\operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{si} \quad y < 0 \\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{si} \quad y \geqslant 0. \end{cases}$$

Exemples

a) $\operatorname{Arg}(1+j\sqrt{3}) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$,

b) $\operatorname{Arg}(-3+5j) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$,

c) $\operatorname{Arg}((\sqrt{2}-\sqrt{3})j) = -\operatorname{Arccos}(0) = -\frac{\pi}{2}$.

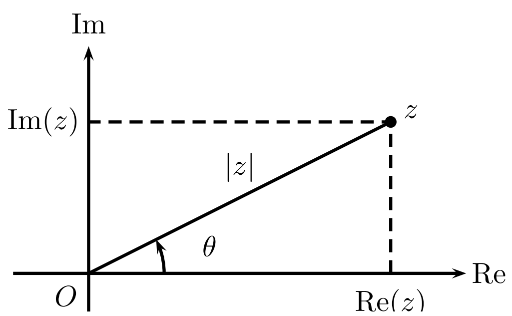
Remarque
Les nombres $\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}^\star$ sont des arguments (non principaux) de z.
Ainsi par exemple $\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{11\pi}{4}$ sont des arguments du nombre $-1-j$. On désigne par $\arg(z)$ un argument quelconque (principal ou non principal) de z. Cette notion permet de simplifier les calculs des produits ou quotients de nombres complexes.

Forme polaire

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ et soit θ un argument de z. Comme le montre la figure ci-dessous, on a $\operatorname{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\operatorname{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$ et il en résulte que $z = |z|\cos(\theta) + j\,|z|\sin(\theta)$ ou encore

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + j\sin(\theta)).$$

Le membre de droite est la forme polaire de z.



Exemple
Pour le nombre $-1-j$ on a $|-1-j| = \sqrt{2}$ et $\operatorname{Arg}(-1-j) = -\frac{3\pi}{4}$ et il en résulte que

$$-1-j = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Interprétation géométrique de la multiplication

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star$ et soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2. Alors

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2)) =$$

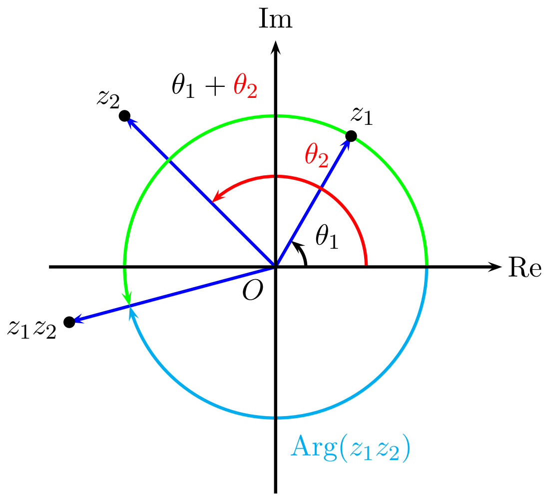
$$|z_1|\,|z_2|\,(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + j(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))).$$

En faisant usage des identités

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \;\text{ et }\; \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

on déduit que

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)). \quad (\star)$$



La relation $(\star)$ montre d'une part, ce qu'on savait déjà, que

le module du produit est égal au produit des modules

et d'autre part qu'

un argument du produit est égal à la somme des arguments.

La figure ci-dessus montre qu'en général l'argument principal d'un produit n'est pas égal à la somme des arguments principaux mais que l'égalité a lieu à un multiple entier de 2π près.

Proposition

a) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$,

b) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. $\square$

Cette proposition se généralise au produit de n nombres complexes.

Proposition
Soient $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^\star$. Alors

a) $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$,

b) $\arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \arg(z_k)$. $\square$

Exemple
Pour calculer l'argument principal de $(1+j)(1+\sqrt{3}j)(-1+j)$ on commence par calculer

$$\mathrm{Arg}(1+j) + \mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}j) + \mathrm{Arg}(-1+j) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{3}$$

et donc $\mathrm{Arg}\big((1+j)(1+\sqrt{3}j)(-1+j)\big) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$.

Interprétation géométrique de la division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star$ et soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2. Alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{\cos(\theta_1) + j\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2)} \frac{\cos(\theta_2) - j\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2) - j\sin(\theta_2)} =$$

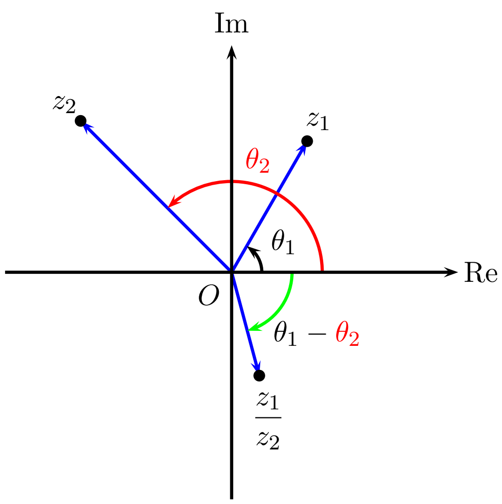
$$\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + j(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)))$$

car $\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2) = 1$. En faisant usage des identités

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \;\text{ et }\; \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

on déduit que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)). \quad (\star\star)$$



La relation ($\star\star$) montre d'une part que

le module du quotient est égal au quotient des modules

et d'autre part qu'

un argument du quotient est égal à la différence des arguments.

En général l'argument principal d'un quotient est égal à la différence des arguments principaux à un multiple entier de 2π près.

Proposition

a) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

b) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$. $\square$

Exemples

a) $\left|\dfrac{1+j}{\sqrt{3}+j}\right| = \dfrac{|1+j|}{|\sqrt{3}+j|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

b) $\arg\left(\frac{1+j}{\sqrt{3}+j}\right) = \operatorname{Arg}(1+j) - \operatorname{Arg}(\sqrt{3}+j) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ et donc $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+j}{\sqrt{3}+j}\right) = \frac{\pi}{12}$.

Puissance d'un nombre complexe

Proposition
Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et θ un argument de z et soit encore $n \in \mathbb{Z}$. Alors

a) $|z^n| = |z|^n$,

b) $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

Démonstration

a) Pour $n \geqslant 0$, c'est une conséquence du fait que le module d'un produit est égal au produit des modules. Pour $n < 0$ on a

$$|z^n| = \left|z^{-|n|}\right| = \left|(z^{-1})^{|n|}\right| = \left|\left(\frac{1}{z}\right)^{|n|}\right| = \left|\frac{1}{z}\right|^{|n|} = \left(\frac{1}{|z|}\right)^{|n|} = \frac{1}{|z|^{|n|}} = |z|^{-|n|} = |z|^n .$$

b) Pour $n \geqslant 0$, c'est une conséquence du fait que l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments. Pour $n < 0$ on a

$$\arg(z^n) = \arg\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{|n|}\right) = |n|\arg\left(\frac{1}{z}\right) = |n|\,(-\arg(z)) = -\,|n|\arg(z) = n\arg(z). \ \square$$

Exemples

a) Pour calculer $(1+j)^{-5}$ on commence par écrire $1+j$ sous forme polaire

$$1+j=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

et on en déduit que

$$(1+j)^{-5}=2^{-\frac{5}{2}}\left(\cos\left(-5\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(-5\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}j.$$

b) Pour calculer l'argument principal de $(\sqrt{3}+j)^{19}$ on commence par calculer

$$\arg\left((\sqrt{3}+j)^{19}\right)=19\arg(\sqrt{3}+j)=19\frac{\pi}{6}$$

et on en déduit que $\mathrm{Arg}\big((\sqrt{3}+j)^{19}\big)=19\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

Exponentielle complexe

Pour $x\in\mathbb{R}$ on a défini e^x en posant

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

et pour $z\in\mathbb{C}$ il est donc raisonnable de poser

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

La proposition suivante montre que l'exponentielle complexe a la même propriété que l'exponentielle réelle. Nous en omettons la démonstration qui est un peu technique.

Proposition
Pour $z,w\in\mathbb{C}$ on a $e^{z+w}=e^ze^w$. $\square$

En posant $z=x$ et $w=jy$ on déduit que $e^{x+jy}=e^xe^{jy}$ et dans ce qui suit on va établir un lien entre e^{jy} et des fonctions élémentaires bien connues.

Lemme

a) $1+x\leqslant e^x$ pour $x\geqslant 0$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}=1$.

Démonstration

a) Par le triangle de Pascal pour $n\geqslant 1$ et $x\geqslant 0$ on a $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=1+n\dfrac{x}{n}+\cdots\geqslant 1+x$ et faisant tendre n vers l'infini on obtient $e^x\geqslant 1+x$.

b) En posant $x=\tan(t)$ on a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)\,t}{\sin(t)}=\lim_{t\to 0}\cos(t)\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{-1}=1.\ \square$$

Par définition

$$e^{jy} = \lim_{n\to\infty}\left(1+j\frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(n\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n}\right)\right)+j\sin\left(n\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n}\right)\right)\right)$$

et on va poursuivre en calculant la limite qui apparaît dans le membre de droite. On note d'abord, par le point a) du Lemme en posant $x=\frac{y^2}{n^2}$, que

$$1 \leqslant \left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant e^{\frac{y^2}{2n}}$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{y^2}{2n}} = 1$ on déduit du théorème des deux gendarmes que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$.
Ensuite, par le point b) du Lemme, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} y\frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{n}\right)}{\frac{y}{n}} = y.$$

On a ainsi démontré que

$$e^{jy} = \cos(y)+j\sin(y).$$

Proposition

a) $e^{x+jy} = e^x(\cos(y)+j\sin(y))$,

b) $\left(e^{x+jy}\right)^\star = e^{x-jy}$,

c) $\left|e^{x+jy}\right| = e^x$ et en particulier $\left|e^{jy}\right| = 1$,

d) $\arg\left(e^{x+jy}\right) = y$.

Démonstration

a) $e^{x+jy} = e^xe^{jy} = e^x(\cos(y)+j\sin(y))$,

b) $\left(e^{x+jy}\right)^\star = e^x(\cos(y)+j\sin(y))^\star = e^x(\cos(y)-j\sin(y)) = e^x(\cos(-y)+j\sin(-y)) = e^xe^{-jy} = e^{x-jy}$,

c) $\left|e^{x+jy}\right| = |e^x|\left|e^{jy}\right| = e^x\sqrt{\cos^2(y)+\sin^2(y)} = e^x$,

d) $\arg(e^{x+jy}) = \arg(e^xe^{jy}) = \arg(e^x)+\arg(e^{jy}) = 0+\arg(\cos(y)+j\sin(y)) = y$.

Forme exponentielle

Soit $z\in\mathbb{C}^\star$ et soit θ un argument de z. Comme $\cos(\theta)+j\sin(\theta)=e^{j\theta}$ la forme polaire de z peut s'écrire

$$z = |z|\,e^{j\theta}.$$

Le membre de droite est la forme exponentielle de z.

Exemples

a) $-1+j = \sqrt{2}\,e^{j\frac{3\pi}{4}}$,

b) $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$,

c) $-1 = e^{j\pi}$.

Formules d'Euler

De la relation $e^{jy} = \cos(y) + j\sin(y)$ on déduit que

$$\cos(y) = \mathrm{Re}\left(e^{jy}\right) = \frac{e^{jy} + \left(e^{jy}\right)^{\star}}{2} = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}$$

et que

$$\sin(y) = \mathrm{Im}\left(e^{jy}\right) = \frac{e^{jy} - \left(e^{jy}\right)^{\star}}{2j} = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}.$$

On a donc démontré que

$$\cos(y) = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(y) = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}.$$

Ce sont les formules d'Euler.

Polynômes trigonométriques

On a vu dans les rappels de trigonométrie que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. C'est une formule importante qu'on utilise souvent dans les applications du calcul intégral. Il est légitime de se demander si des formules analogues existent pour $\cos^p(x)$, $\sin^q(x)$ et plus généralement pour $\cos^p(x)\sin^q(x)$ où $p,\ q \in \mathbb{N}$. Les formules d'Euler vont nous permettre de fournir une réponse constructive à ces questions.

Définition

On appelle polynôme trigonométrique de degré n une expression du type

$$P_n(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \cdots + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

où les coefficients a_k et b_k sont des nombres réels.

Proposition

Toute expression du type $\cos^p(x)\sin^q(x)$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme trigonométrique de degré $p+q$. De plus ce polynôme s'obtient en écrivant

$$\cos^p(x)\sin^q(x) = \left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^q$$

puis en développant le terme de droite et en reformant des cosinus et sinus de multiples de x. $\square$

Exemple

On va exprimer $\cos^3(x)$ sous la forme d'un polynôme trigonométrique. Pour ce faire on écrit successivement

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3jx} + 3e^{2jx}e^{-jx} + 3e^{jx}e^{-2jx} + e^{-3jx}}{8} = \frac{e^{3jx} + 3e^{jx} + 3e^{-jx} + e^{-3jx}}{8}\\ &= \frac{1}{4}\frac{e^{3jx} + e^{-3jx}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).\end{aligned}$$

Ainsi donc

$$\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$$

et on peut vérifier partiellement ce résultat en observant que lorsque $x = 0$ cette identité prend la forme $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$, ce qui est correct.

Remarques

a) L'expression « linéariser $\cos^p(x)\sin^q(x)$ » signifie « écrire $\cos^p(x)\sin^q(x)$ sous forme d'un polynôme trigonométrique ».

b) Parfois on est intéressé à exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ comme des polynômes en $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Pour ce faire on utilise la relation

$$\cos(nx) + j\sin(nx) = e^{jnx} = \left(e^{jx}\right)^n = (\cos(x) + j\sin(x))^n$$

et on déduit que

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + j\sin(x))^n\right) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \mathrm{Im}\left((\cos(x) + j\sin(x))^n\right).$$

Exemple

On a $\cos(3x) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + j\sin(x))^3\right) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$ et la relation $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ conduit à

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

Remarque

Grâce aux formules d'Euler on peut parfois exprimer des sommes trigonométriques sous forme compacte.

Exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose $S_n(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)$. On a d'abord

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(e^{jx} + e^{2jx} + \cdots + e^{njx}\right)$$

et comme $\mathrm{Im}(1) = 0$ on a encore

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(1 + e^{jx} + e^{2jx} + \cdots + e^{njx}\right) = \mathrm{Im}\left(1 + e^{jx} + \left(e^{jx}\right)^2 + \cdots + \left(e^{jx}\right)^n\right).$$

Pour $x \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ on a $e^{jx} \neq 1$ et on peut utiliser l'identité

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

avec $z = e^{jx}$. On en déduit que

$$S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{(n+1)jx}}{1 - e^{jx}}\right)$$

et on poursuit en calculant la partie imaginaire (de manière un peu astucieuse)

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{(n+1)jx}}{1 - e^{jx}}\,\frac{e^{-\frac{jx}{2}}}{e^{-\frac{jx}{2}}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\frac{jx}{2}} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)jx}}{e^{-\frac{jx}{2}} - e^{\frac{jx}{2}}}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\frac{jx}{2}} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)jx}}{-2j\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$S_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Finalement on constate sur l'expression originale de S_n que $S_n(2k\pi) = 0$ où $k \in \mathbb{Z}$ et donc

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \neq 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Logarithme complexe

Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle logarithme naturel de y l'unique nombre réel x tel que $e^x = y$. Par analogie, pour $w \in \mathbb{C}^\star$ on appelle logarithme (naturel) de w tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = w$. Pour calculer z on pose $z = x + jy$ et on utilise le fait que l'équation $e^{x+jy} = w$ est équivalente aux équations $\left|e^{x+jy}\right| = |w|$ et $\arg(e^{x+jy}) = \arg(w)$. La première équation implique que $e^x = |w|$ et donc $x = \ln(|w|)$ et la seconde implique que $y = \arg(w) = \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Définition

a) Les nombres $\ln(|w|) + j(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$, qui sont les solutions de l'équation $e^z = w$, sont les logarithmes de w.

b) La valeur $k = 0$ donne lieu au logarithme principal[3] que l'on note Ln et on a donc

$$\operatorname{Ln}(w) = \ln(|w|) + j\operatorname{Arg}(w).$$

Exemples

a) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln(|-1|) + j\operatorname{Arg}(-1) = \ln(1) + j\pi = j\pi$,

b) $\operatorname{Ln}(1+j) = \ln(\sqrt{2}) + j\operatorname{Arg}(1+j) = \frac{1}{2}\ln(2) + j\frac{\pi}{4}$.

Remarque

Pour $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^\star$ on a, puisque $|w_1 w_2| = |w_1|\,|w_2|$,

$$\operatorname{Ln}(w_1 w_2) = \ln(|w_1 w_2|) + j\operatorname{Arg}(w_1 w_2) = \ln(|w_1|) + \ln(|w_2|) + j\operatorname{Arg}(w_1 w_2).$$

Si $\operatorname{Arg}(w_1 w_2) = \operatorname{Arg}(w_1) + \operatorname{Arg}(w_2)$ alors

$$\operatorname{Ln}(w_1 w_2) = \ln(|w_1|) + \ln(|w_2|) + j(\operatorname{Arg}(w_1) + \operatorname{Arg}(w_2)) = (\ln(|w_1|) + j\operatorname{Arg}(w_1)) + (\ln(|w_2|) + j\operatorname{Arg}(w_2))$$

et donc

$$\operatorname{Ln}(w_1 w_2) = \operatorname{Ln}(w_1) + \operatorname{Ln}(w_2).$$

En général $\operatorname{Arg}(w_1 w_2)$ et $\operatorname{Arg}(w_1) + \operatorname{Arg}(w_2)$ diffèrent par un multiple entier de 2π et il en résulte que $\operatorname{Ln}(w_1 w_2)$ et $\operatorname{Ln}(w_1)$+$\operatorname{Ln}(w_2)$ sont égaux à un multiple entier de $j2\pi$ près.

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et soit $c \in \mathbb{C}^\star$. On dit que les nombres a et b sont égaux modulo c si $a - b$ est un multiple entier de c et on écrit $a = b \mod c$.

Exemples

a) $-\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \mod 2\pi$ car $-\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -2\pi$,

b) $3 + j\frac{25\pi}{4} = 3 + j\frac{\pi}{4} \mod j2\pi$ car $3 + j\frac{25\pi}{4} - (3 + j\frac{\pi}{4}) = 3(j2\pi)$.

Avec cette définition on a donc

$$\operatorname{Ln}(w_1 w_2) = \operatorname{Ln}(w_1) + \operatorname{Ln}(w_2) \mod j2\pi.$$

[3] C'est le logarithme que donne une machine à calculer.

Oscillations harmoniques

On va voir que les nombres complexes jouent un rôle important dans l'étude des oscillations harmoniques. Puisque $e^{jy} = \cos(y) + j\sin(y)$ on a $\cos(y) = \text{Re}\big(e^{jy}\big)$ et l'oscillation harmonique $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ peut donc s'écrire $f(t) = \text{Re}\big(Ae^{j(\omega t+\phi)}\big) = \text{Re}\big(Ae^{j\phi}e^{j\omega t}\big)$.

Définition

Le nombre complexe $\underline{A} = Ae^{j\phi}$ est appelé l'amplitude complexe de l'oscillation harmonique $A\cos(\omega t+\phi)$.

Par définition de l'amplitude complexe on a $A\cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\big(\underline{A}e^{j\omega t}\big)$ et de plus $A = |\underline{A}|$ et $\phi = \text{Arg}(\underline{A})$ en supposant, sans restreindre la généralité, que $\phi \in]-\pi, \pi]$.

Somme d'oscillations

Soient f_1 et f_2 deux oscillations harmoniques de même pulsation définies par $f_1(t) = A_1\cos(\omega t + \phi_1)$ et $f_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2)$. On va voir que la somme des oscillations $f_1 + f_2$ est encore une oscillation harmonique dont on va calculer l'amplitude et la phase en passant par les amplitude complexes.
En introduisant $\underline{A}_1 = A_1e^{j\phi_1}$ et $\underline{A}_2 = A_2e^{j\phi_2}$ on a

$$f_1(t) + f_2(t) = \text{Re}\left(\underline{A}_1e^{j\omega t}\right) + \text{Re}\left(\underline{A}_2e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left((\underline{A}_1 + \underline{A}_2)e^{j\omega t}\right).$$

On calcule $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$, on pose $A_3 = |\underline{A}_3|$ et $\phi_3 = \text{Arg}(\underline{A}_3)$ et on a alors

$$f_1(t) + f_2(t) = \text{Re}\left(\underline{A}_3e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(A_3e^{j\phi_3}e^{j\omega t}\right) = \text{Re}\left(A_3e^{j(\omega t+\phi_3)}\right) = A_3\cos(\omega t + \phi_3).$$

Exemple

Pour les oscillations harmoniques $f_1(t) = 5\cos(\omega t + 3)$ et $f_2(t) = 4\cos(\omega t - 2)$ on a successivement

$$\begin{array}{rcl}\underline{A}_1 & = & 5e^{3j} \approx -4.94996 + 0.70560j\\ \underline{A}_2 & = & 4e^{-2j} \approx -1.66459 - 3.63719j\\ \underline{A}_3 & = & \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \approx -6.61455 - 2.93159j \approx 7.23509e^{-2.72441j}\end{array}$$

dont on déduit que

$$5\cos(\omega t + 3) + 4\cos(\omega t - 2) \approx 7.23509\cos(\omega t - 2.72441).$$

Remarques

a) Cette méthode se généralise au calcul de la somme de plusieurs oscillations harmoniques de même pulsation.

b) Par définition de l'amplitude complexe on a $A\sin(\omega t + \phi) = \text{Im}\big(\underline{A}e^{j\omega t}\big)$ et on peut écrire

$$A_1\sin(\omega t + \phi_1) + A_2\sin(\omega t + \phi_2)$$

sous la forme $A_3\sin(\omega t + \phi_3)$ en faisant usage de la partie imaginaire.

c) On peut écrire

$$A_1\sin(\omega t + \phi_1) + A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

sous la forme $A_3\cos(\omega t + \phi_3)$ (respectivement $A_3\sin(\omega t + \phi_3)$) en réécrivant préalablement cette somme en un somme de cosinus (respectivement en une somme de sinus) en faisant usage de la relation $\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ (respectivement $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$).

d) On rencontre parfois des expressions du type $f(t) = Ae^{\mu t}\cos(\omega t + \phi)$. Ce sont des oscillations harmoniques amorties si $\mu < 0$ ou amplifiées si $\mu > 0$. De telles oscillations peuvent s'écrire sous la forme $f(t) = \text{Re}\left(\underline{A}e^{(\mu+j\omega)t}\right)$ où $\underline{A} = Ae^{j\phi}$.

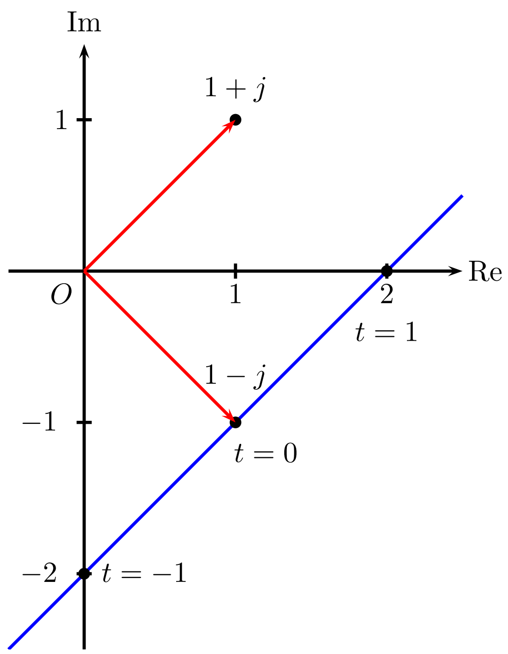
Représentation des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

On s'intéresse ici à la représentation des fonctions f qui à $t \in \mathbb{R}$ font correspondre un nombre $f(t) \in \mathbb{C}$. Le graphe d'une telle fonction f est une courbe dans l'espace tridimensionnel qu'il est en général difficile de représenter. En pratique on se contente de représenter la trajectoire de f, c'est l'ensemble des points que parcourt $f(t)$ dans le plan complexe lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, les graphes des parties réelle et imaginaire de f ou ceux des module et argument principal de f.

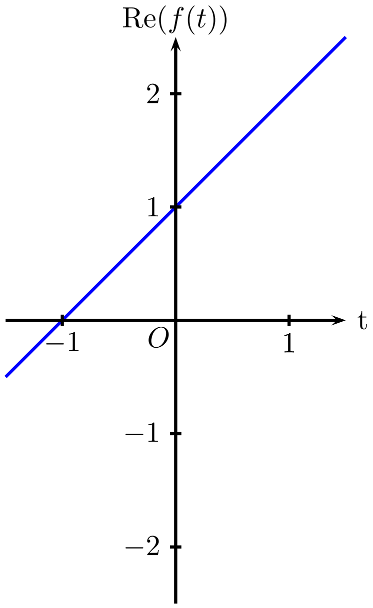
Exemples

a) Soit f la fonction définie par $f(t) = (1 + j)t + 1 - j$.

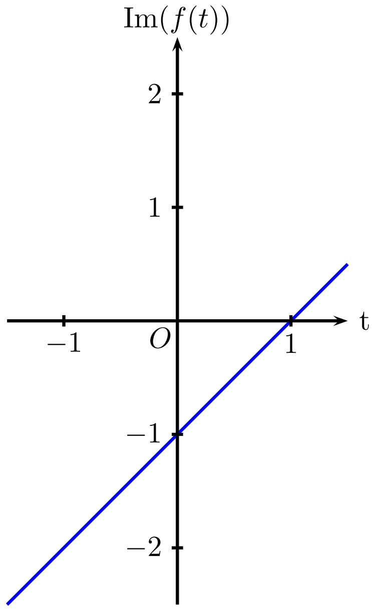
1) Puisque on obtient $f(t)$ en ajoutant à $1 - j$ un multiple réel de $1 + j$, la trajectoire de f est une droite.



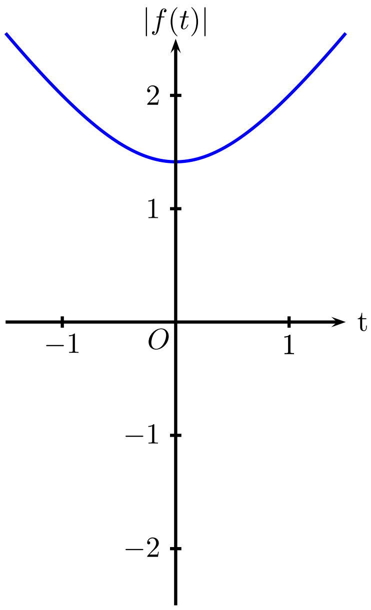
2) La fonction f se réécrit $f(t) = t + 1 + j(t - 1)$ et donc $\mathrm{Re}(f(t)) = t + 1$ et $\mathrm{Im}(f(t)) = t - 1$. Les graphes des parties réelle et imaginaire de f sont des droites.

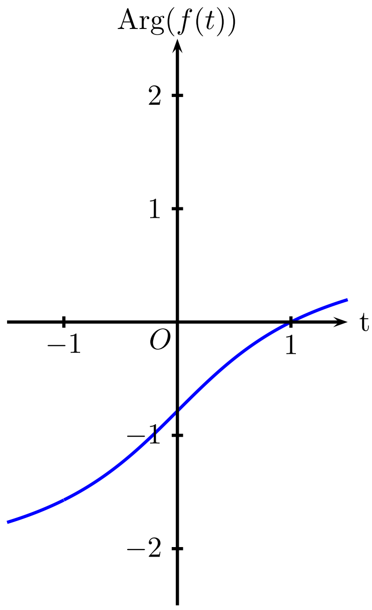


2



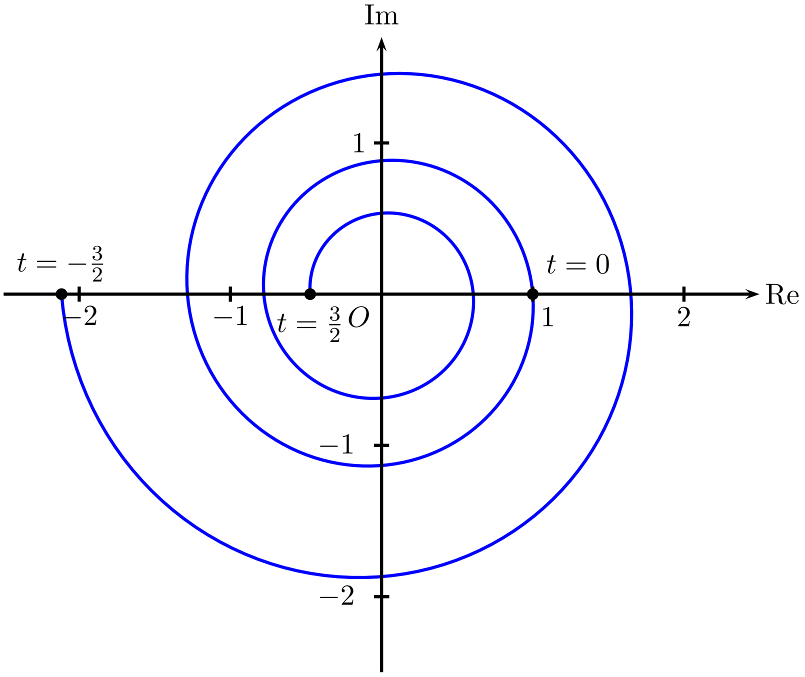
3) On a $|f(t)| = \sqrt{2}\sqrt{t^2+1}$ et $\operatorname{Arg}(f(t)) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right) - \pi & \text{si} \quad t < -1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t = -1 \\ \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right) & \text{si} \quad t > -1. \end{cases}$



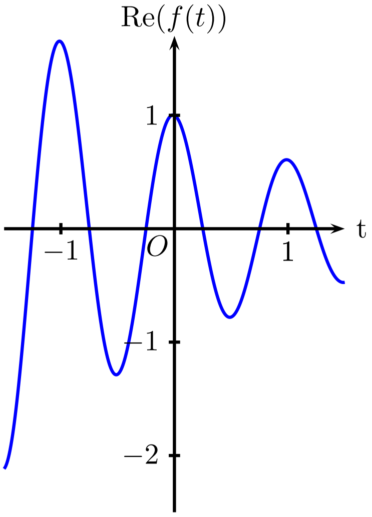


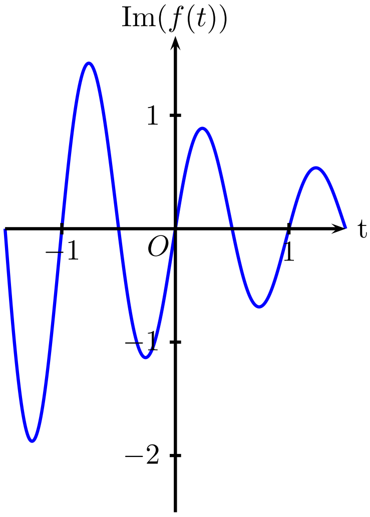
b) Soit f la fonction définie par $f(t) = e^{(-\frac{1}{2}+j2\pi)t}$.

1) Puisque $|f(t)| = e^{-\frac{1}{2}t}$ et que $\arg(f(t)) = 2\pi t$ la trajectoire est une spirale qui s'enroule autour de l'origine lorsque t tend vers l'infini.

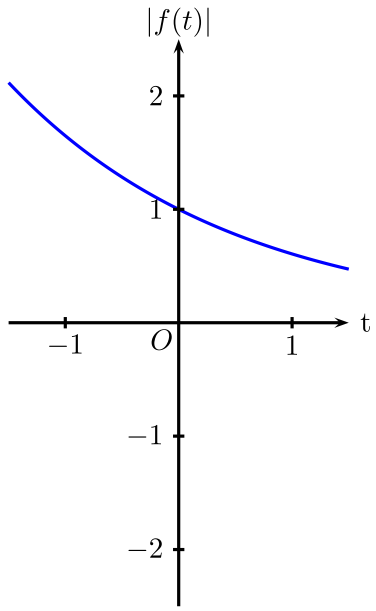


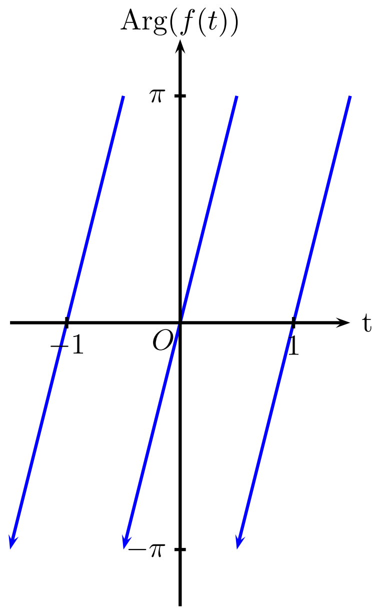
2) On a $\mathrm{Re}(f(t)) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(2\pi t)$ et $\mathrm{Im}(f(t)) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin(2\pi t)$.





3) On a $|f(t)| = e^{-\frac{1}{2}t}$ et $\mathrm{Arg}(f(t)) = 2\pi t \mod 2\pi$.





Fonctions homographiques

Ce sont des fonctions du type $f(t) = \dfrac{a+bt}{c+dt}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $d \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

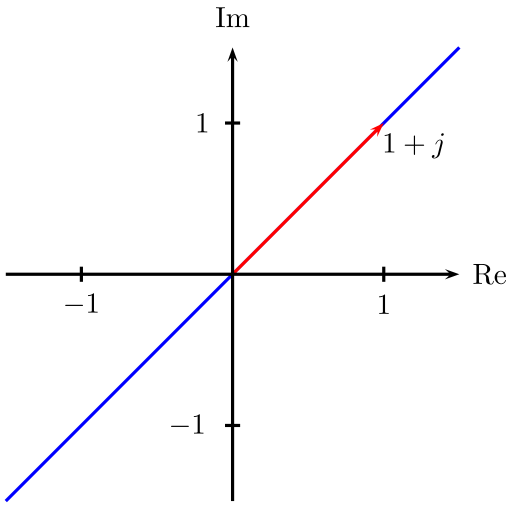
Remarques

a) Si $d = 0$ alors $f(t) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}t$ et la fonction f est une fonction affine. Sa trajectoire est une droite si $b \neq 0$ et un point si $b = 0$.

b) Si $ad - bc = 0$ alors $a = \dfrac{bc}{d}$ et $f(t) = \dfrac{\frac{bc}{d} + bt}{c+dt} = \dfrac{b}{d}$ et la trajectoire de f est un point.

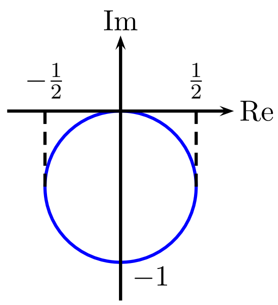
Exemples

a) Étudions la trajectoire de la fonction $f(t) = \dfrac{1+j}{1+t}$ où $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Cette fonction se réécrit $f(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)(1+j)$ et comme t est réel, $f(t)$ parcourt tous les multiples non nuls de $1+j$. De plus $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ et dans ce contexte on dit que $f(\infty) = 0$ de sorte que la trajectoire de f est une droite.



b) Étudions la trajectoire de la fonction $g(t) = \frac{1}{j+t}$.
On a $g(-1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$, $g(0) = -j$, $g(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$ et de plus $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ et donc $g(\infty) = 0$. Ceci suggère que la trajectoire de g est un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $-\frac{1}{2}j$. On le vérifie en calculant

$$\left|g(t) - \left(-\frac{1}{2}j\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+jt}{j+t}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+jt}{t+j}\right| = \frac{1}{2}.$$



On va démontrer que la trajectoire d'une fonction homographique est une droite ou un cercle.

Proposition

Soit $f(t) = \dfrac{a+bt}{c+dt}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $d \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Lorsque t parcourt $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f(t)$ parcourt $\begin{cases} \text{une droite si } \operatorname{Im}\left(\dfrac{c}{d}\right) = 0, \\ \text{un cercle si } \operatorname{Im}\left(\dfrac{c}{d}\right) \neq 0. \end{cases}$

Démonstration

En divisant $a + bt$ par $c + dt$ on obtient

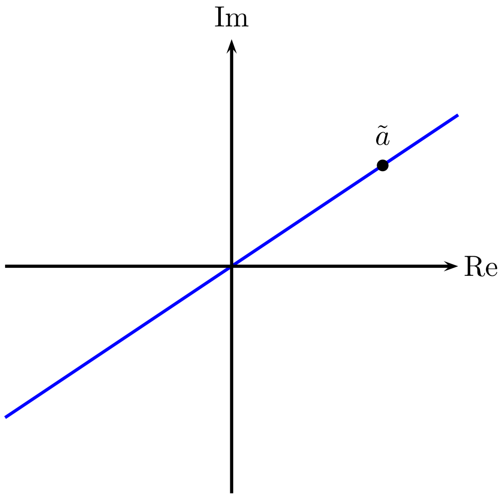
$$a + bt = \frac{b}{d}(c + dt) + a - \frac{bc}{d}$$

et on vérifie qu'en posant $\tilde{b} = \dfrac{b}{d}$, $\tilde{a} = \dfrac{ad - bc}{d^2}$ et $\tilde{c} = \dfrac{c}{d}$ la fonction f se réécrit

$$f(t) = \tilde{b} + \frac{\tilde{a}}{\tilde{c} + t}.$$

Sans restreindre la généralité on peut supposer que $\tilde{b} = 0$, le cas $\tilde{b} \neq 0$ n'a qu'un effet de translation.

Si $\mathrm{Im}\left(\frac{c}{d}\right) = 0$ alors $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ est donc un multiple réel de $\tilde{a}$ et la trajectoire de f est une droite.

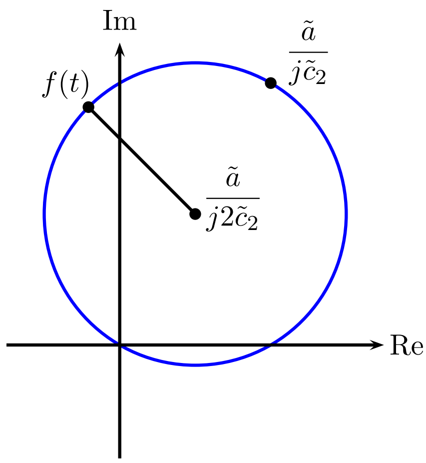


Si $\mathrm{Im}\left(\frac{c}{d}\right) \neq 0$ alors $\tilde{c} = \tilde{c}_1 + j\tilde{c}_2$ avec $\tilde{c}_2 \neq 0$. On observe que $f(\infty) = 0$ et que

$$|f(t)| = \frac{|\tilde{a}|}{|\tilde{c} + t|} = \frac{|\tilde{a}|}{\sqrt{(\tilde{c}_1 + t)^2 + \tilde{c}_2^2}}.$$

Ainsi $|f(t)|$ est maximum lorsque $t = -\tilde{c}_1$ et $f(-\tilde{c}_1) = \frac{\tilde{a}}{j\tilde{c}_2}$. Si la trajectoire est un cercle, le segment d'extrémités 0 et $\frac{\tilde{a}}{j\tilde{c}_2}$ est un diamètre du cercle et $\frac{\tilde{a}}{j2\tilde{c}_2}$ en est le centre. On vérifie que la trajectoire est un cercle en calculant

$$\left| f(t) - \frac{\tilde{a}}{j2\tilde{c}_2} \right| = |\tilde{a}| \left| \frac{1}{\tilde{c}_1 + t + j\tilde{c}_2} - \frac{1}{j2\tilde{c}_2} \right| = \frac{|\tilde{a}|}{2\,|\tilde{c}_2|} \left| \frac{-(\tilde{c}_1 + t) + j\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1 + t + j\tilde{c}_2} \right| = \frac{|\tilde{a}|}{2\,|\tilde{c}_2|}. \ \square$$



Racines d'un nombre complexe

Définition

Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit n un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racine énième de w tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = w$.

Pour calculer les racines énièmes[4] de w on écrit $w = |w|\, e^{j\phi}$ où ϕ est un argument de w et on cherche z sous la forme $|z|\, e^{j\alpha}$ où α est un argument de z. L'équation $z^n = w$ se réécrit

$$|z|^n\, e^{jn\alpha} = |w|\, e^{j\phi}$$

et on en déduit que

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\alpha = \phi + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \alpha = \dfrac{\phi + 2k\pi}{n} \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$ on obtient les n racines énièmes de w. Elles sont donc données par

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{j\frac{\phi}{n}} \\ z_2 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{j\frac{\phi+2\pi}{n}} \\ z_3 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{j\frac{\phi+4\pi}{n}} \\ \quad\vdots \\ z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{j\frac{\phi+2(k-1)\pi}{n}} \\ \quad\vdots \\ z_n = \sqrt[n]{|w|}\, e^{j\frac{\phi+2(n-1)\pi}{n}} \end{cases}$$

ou encore de manière compacte par

$$z_\ell = \sqrt[n]{|w|}\, e^{j\frac{\phi+2(\ell-1)\pi}{n}} \quad \text{où } \ell = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemple

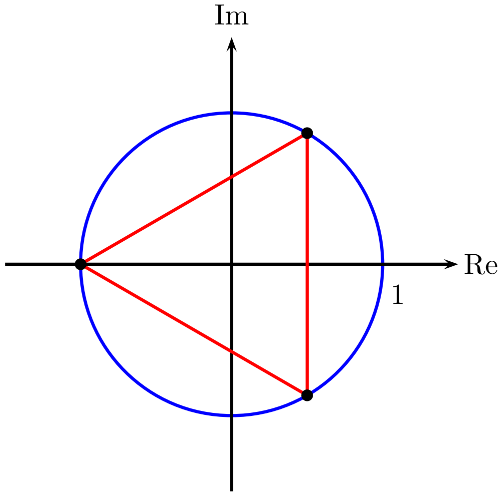
On choisit $w = -1$ et $n = 3$ et on calcule donc les racines cubiques de -1. Comme $|-1| = 1$ et $\mathrm{Arg}(w) = \pi$ on obtient

$$\begin{cases} z_1 = e^{j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = e^{j\frac{\pi+2\pi}{3}} = e^{j\pi} = -1 \\ z_3 = e^{j\frac{\pi+4\pi}{3}} = e^{j\frac{5\pi}{3}} = e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Dans le plan complexe les racines cubiques de -1 sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 1 centré à l'origine.

---

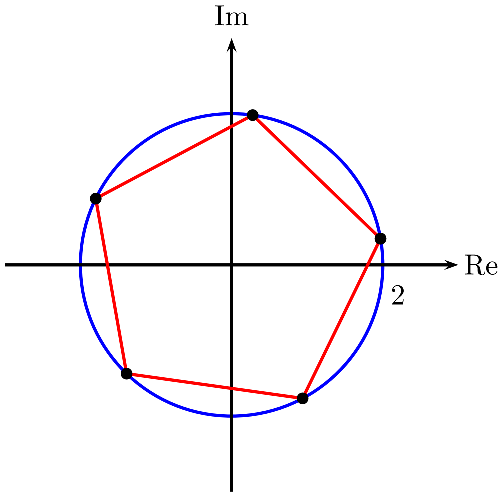
[4]Si $w = 0$ alors $z = 0$ et on peut donc supposer que w est non nul et qu'il a donc un argument.



Proposition

Dans le plan complexe, les racines énièmes de w sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{|w|}$ centré à l'origine. $\square$

Ci-dessous les racines cinquièmes du nombre complexe $w = 32e^{j\frac{5\pi}{18}}$.



Équation du second degré

Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ où $a \neq 0$ on considère l'équation

$$az^2 + bz + c = 0.$$

En procédant comme dans le cas réel on aboutit à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

En désignant par δ une racine carrée de $b^2 - 4ac$ on a

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4a^2}$$

et on en déduit que

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Exemple

On considère l'équation

$$z^2 - (5 + 3j)z + 4 + 7j = 0. \quad (\star)$$

On a donc

$$b^2 - 4ac = (5 + 3j)^2 - 4(4 + 7j) = 25 + 30j - 9 - 16 - 28j = 2j = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$$

et $\delta = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 + j$ est une racine carrée de $2j$. Les racines de l'équation $(\star)$ sont donc

$$z_1 = \frac{5 + 3j - (1 + j)}{2} = 2 + j \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5 + 3j + (1 + j)}{2} = 3 + 2j.$$

Polynômes

On va voir qu'un polynôme à coefficients réels ou complexes de degré $n \geqslant 1$ possède n racines qui peuvent être réelles ou complexes. C'est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre dont la démonstration dépasse le cadre de ce cours.

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes possède au moins une racine complexe. $\square$

Définition

On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité $m \geqslant 1$ du polynôme p si $p(z) = (z - a)^m q(z)$ où $q(a) \neq 0$. Si $m = 1$ on dit que a est une racine simple et si $m = 2$ on dit que a est une racine double.

Exemples

a) Le nombre $1 + j$ est une racine simple du polynôme $z^2 + 2j$ puisque $z^2 - 2j = (z - (1 + j))(z + (1 + j))$ et $1 + j + (1 + j) = 2 + 2j \neq 0$.

b) Le nombre j est une racine double du polynôme $z^3 + 3z - 2j$ puisque $z^3 + 3z - 2j = (z - j)^2(z + 2j)$ et $j + 2j = 3j \neq 0$.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

Corollaire

Le polynôme $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ où les $a_k \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$ se factorise sous la forme

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_i)^{m_i} \cdots (z - z_l)^{m_l}$$

où $z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_l$ sont les racines distinctes de p et les multiplicités des racines satisfont

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_l = n.$$

Démonstration

Par le théorème fondamental de l'algèbre le polynôme $p(z)$ possède au moins une racine. On l'appelle z_1 et on divise le polynôme $p(z)$ par $z - z_1$ et on obtient

$$p(z) = (z - z_1) q_{n-1}(z)$$

où $q_{n-1}(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$. Si $q_{n-1}(z_1) \neq 0$ on en a fini avec la racine z_1 et on pose $m_1 = 1$. Si $q_{n-1}(z_1) = 0$ on divise $q_{n-1}(z)$ par $z - z_1$ pour obtenir $q_{n-1}(z) = (z - z_1) q_{n-2}(z)$ et donc

$$p(z) = (z - z_1)^2 q_{n-2}(z)$$

où $q_{n-2}(z)$ est un polynôme de degré $n - 2$. Si $q_{n-2}(z_1) \neq 0$ on en a fini avec la racine z_1 et on pose $m_1 = 2$. Si $q_{n-2}(z_1) = 0$ on répète l'opération et on parvient finalement à

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1} q_{n-m_1}(z)$$

où $q_{n-m_1}(z)$ est un polynôme de degré $n - m_1$ tel que $q_{n-m_1}(z_1) \neq 0$. Par le théorème fondamental de l'algèbre le polynôme $q_{n-m_1}(z)$ possède au moins une racine. On l'appelle z_2 et on répète l'opération pour obtenir

$$q_{n-m_1}(z) = (z - z_2)^{m_2} q_{n-m_1-m_2}(z)$$

où $q_{n-m_1-m_2}(z_2) \neq 0$ et donc

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} q_{n-m_1-m_2}(z)$$

Par le théorème fondamental de l'algèbre le polynôme $q_{n-m_1-m_2}(z)$ possède au moins une racine. On l'appelle z_3 et en répétant le processus on parvient à

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_i)^{m_i} \cdots (z - z_l)^{m_l} q_0(z)$$

où q_0 est un polynôme de degré 0, c'est donc un polynôme constant. En comparant les termes de degré n de part et d'autre du signe d'égalité on observe que $q_0 = a_n$. $\square$

Exemple

Puisque les racines du polynômes $z^3 - 1$ sont les racines cubiques de 1 on a

$$z^3 - 1 = (z-1)(z - e^{j\frac{2\pi}{3}})(z - e^{j\frac{4\pi}{3}}) = (z-1)\left(z - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Polynômes à coefficients réels

On va voir qu'un polynôme à coefficients réels peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1 ou 2 à coefficients réels.

Proposition

Soit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients réels et soit $w \in \mathbb{C}$ une racine de p. Alors w^* est aussi une racine de p.

Démonstration

Comme $p(w) = 0$ on a $(p(w))^* = 0$ et donc

$$(a_n w^n)^* + \left(a_{n-1} w^{n-1}\right)^* + \cdots + \left(a_k w^k\right)^* + \cdots + (a_1 w)^* + a_0^* = 0.$$

Comme les coefficients de p sont réels on a

$$\left(a_k w^k\right)^* = a_k^* \left(w^k\right)^* = a_k \left(w^*\right)^k$$

et donc

$$a_n \left(w^*\right)^n + a_{n-1} \left(w^*\right)^{n-1} + \cdots + a_k \left(w^*\right)^k + \cdots + a_1 w^* + a_0 = 0$$

ce qui implique que $p(w^*) = 0$. $\square$

Lemme

Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit p le polynôme défini par $p(z) = (z - w)(z - w^*)$. Alors p est un polynôme à coefficients réels.

Démonstration

En développant p on obtient $p(z) = z^2 - (w + w^*)z + ww^*$ et donc

$$p(z) = z^2 - 2\mathrm{Re}(w)\, z + |w|^2. \ \square$$

Proposition

Un polynôme à coefficients réels peut s'écrire comme un produit de polynômes de degré 1 ou 2 à coefficients réels.

Démonstration

Soit p un polynômes à coefficients réels. Pour simplifier la démonstration on va supposer que toutes les racines de p sont simples. Soient donc $x_1, x_2, \cdots, x_i$ les racines réelles de p et $z_1, z_1^*, z_2, z_2^*, \cdots, z_l, z_l^*$ les racines complexes de p. Alors

$$p(z) = a_n (z - x_1) \cdots (z - x_i)(z - z_1)(z - z_1^*) \cdots (z - z_l)(z - z_l^*)$$

et en effectuant les produits $(z - z_k)(z - z_k^*)$ il vient

$$p(z) = a_n (z - x_1) \cdots (z - x_i)(z^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)z + |z_1|^2) \cdots (z^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)z + |z_l|^2). \ \square$$

Remarque

Dans l'égalité

$$p(z) = a_n (z - x_1) \cdots (z - x_i)(z^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)z + |z_1|^2) \cdots (z^2 - 2\mathrm{Re}(z_l)z + |z_l|^2)$$

le membre de droite est la **factorisation de p sur** $\mathbb{R}$.

Exemple

Pour factoriser le polynôme $z^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$, on commence par résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 1 = 0$ ou encore $z^4 = -1$. Les racines de cette équation sont les racines quatrièmes de -1:

$$z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}, \ \ z_2 = e^{j\frac{3\pi}{4}}, \ \ z_3 = e^{j\frac{5\pi}{4}} = z_2^*, \ \ z_4 = e^{j\frac{7\pi}{4}} = z_1^*.$$

On a alors

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_1^*)(z - z_2)(z - z_2^*) = (z^2 - 2\mathrm{Re}(z_1)z + 1)(z^2 - 2\mathrm{Re}(z_2)z + 1)$$

et donc

$$p(z) = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1).$$

Formules de Viète

On généralise aux polynômes de degré n les formules qui expriment la somme et le produit des racines d'un polynôme du deuxième degré en fonction des coefficients de ce polynôme.

Proposition

Soit $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_k z^k + \cdots + a_1 z + a_0$ où les $a_k \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$ et soient $z_1, z_2, \cdots, z_n$ les racines de p numérotées en tenant compte de leur multiplicité. Alors on a les formules suivantes, appelées formules de Viète :

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_k + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

et

$$z_1 z_2 \cdots z_k \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Démonstration

Puisque $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont les racines de p on a la factorisation

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_k)\cdots(z - z_n)$$

et en développant le terme de droite il vient

$$p(z) = a_n z^n + (-a_n(z_1 + z_2 + \cdots + z_k + \cdots + z_n))z^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n(z_1 z_2 \cdots z_k \cdots z_n).$$

Puisque le coefficients de z^{n-1} est égal à a_{n-1} et que le terme constant est égal à a_0 on obtient les relations

$$-a_n(z_1 + z_2 + \cdots + z_k + \cdots + z_n) = a_{n-1} \text{ et } (-1)^n a_n(z_1 z_2 \cdots z_k \cdots z_n = a_0$$

dont les formules de Viète se déduisent immédiatement. $\square$

Exemple

Les racines de l'équation $2z^3 + 17z + 6 = 0$ satisfont

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ et } z_1 z_2 z_3 = -3.$$

Fonctions de la variable complexe à valeurs complexes

On va étudier des fonctions qui à un nombre $z \in \mathbb{C}$ font correspondre un nombre $f(z) \in \mathbb{C}$.

Exemples

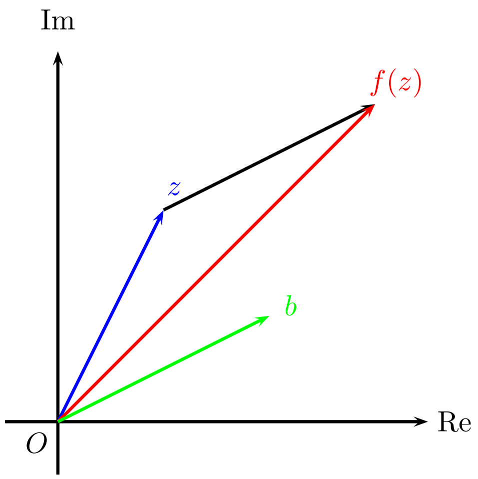
a) $f(z) = az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$. Ce sont des fonctions affines.

b) $f(z) = e^z$.

On ne peut pas représenter le graphe de telles fonctions car il faudrait deux dimensions pour représenter z et deux autres dimensions pour représenter $f(z)$.
On va interpréter les fonctions affines comme des transformations du plan. On illustre ceci sur plusieurs exemples dont découlera le résultat final.

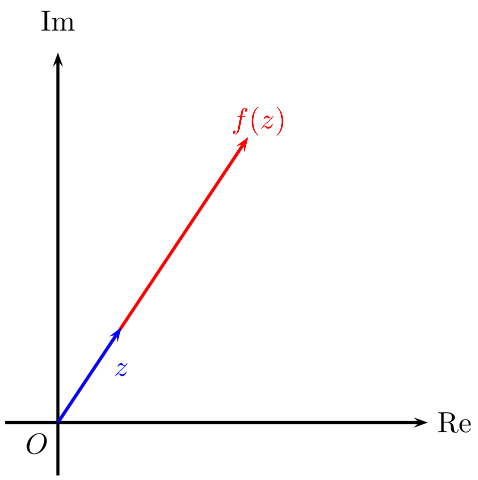
Exemples

a) $f(z) = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$.



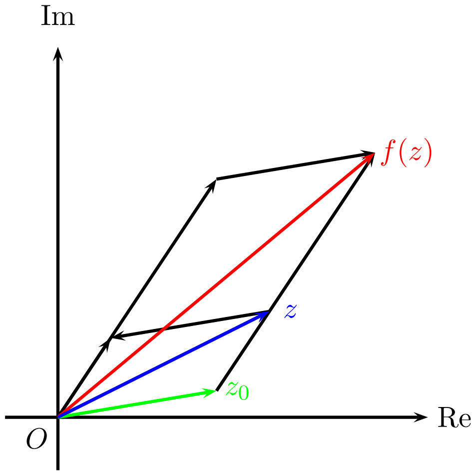
La fonction f s'interprète comme une translation de vecteur $\vec{b}$ où $\vec{b}$ est l'image vectorielle de b.

b) $f(z) = kz$ où $k \in \mathbb{R}$.



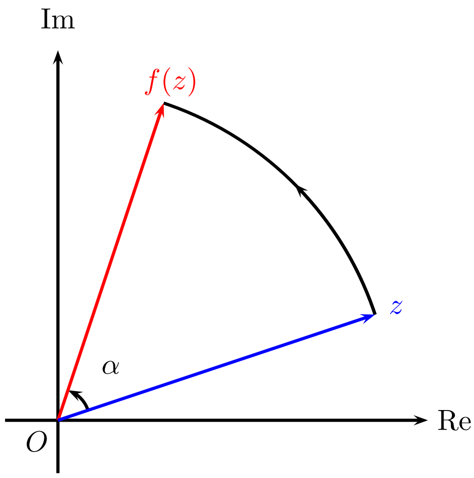
La fonction f s'interprète comme une homothétie de rapport k de centre O.

c) $f(z) = k(z - z_0) + z_0$ où $k \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

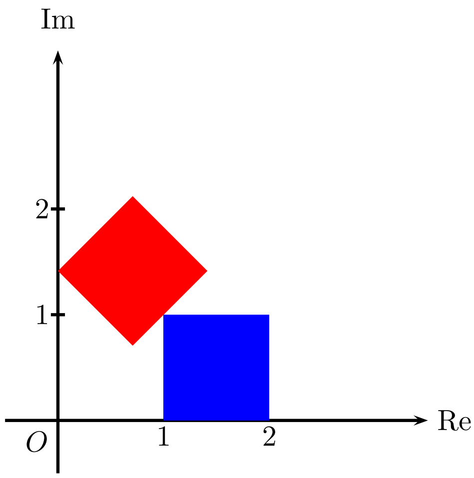


La fonction f s'interprète comme une homothétie de rapport k de centre z_0.

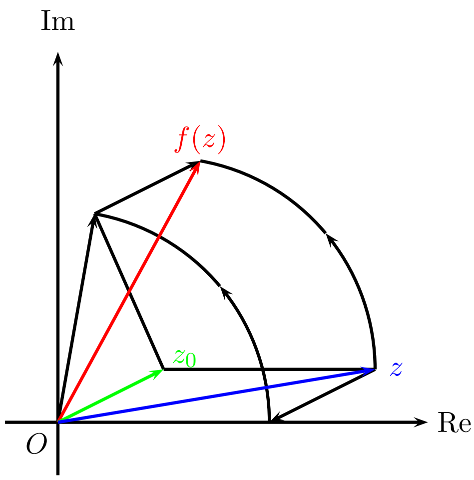
d) $f(z) = az$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.
On a $|f(z)| = |z|$ et $\arg(f(z)) = \alpha + \arg(z)$ où $\alpha =$Arg(a).



La fonction f s'interprète comme une rotation d'angle $\alpha = \text{Arg}(a)$ de centre O. Ainsi la fonction $f(z) = e^{j\frac{\pi}{4}}z$ fait subir au carré bleu une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

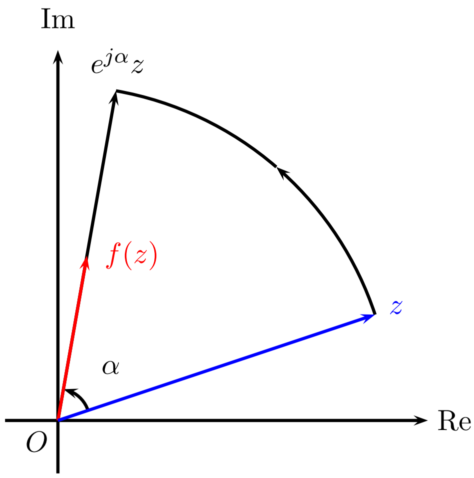


e) $f(z) = a(z - z_0) + z_0$ où $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.



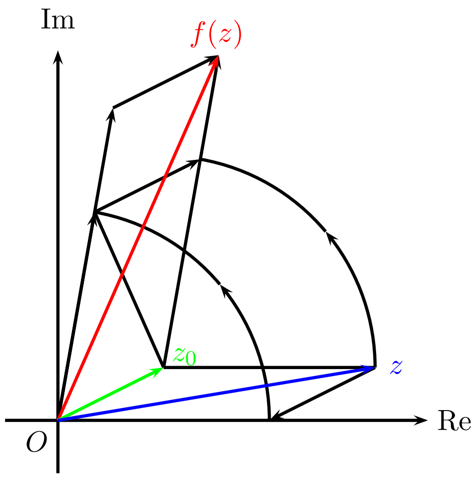
La fonction f s'interprète comme une rotation d'angle $\alpha = \mathrm{Arg}(a)$ et de centre z_0.

f) $f(z) = az$ où $a \in \mathbb{C}$.
La fonction f se réécrit $f(z) = |a|\, e^{j\alpha}$ où $\alpha =$Arg(a).



La fonction f s'interprète comme une rotation d'angle $\alpha = \mathrm{Arg}(a)$ suivie d'une homothétie de rapport $|a|$ (ou d'une homothétie de rapport $|a|$ suivie d'une rotation d'angle $\alpha = \mathrm{Arg}(a)$) de centre O. C'est ce qu'on appelle une similitude d'angle α et de rapport $|a|$ de centre O.

g) $f(z) = a(z - z_0) + z_0$ où $a \in \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.



La fonction f s'interprète comme une similitude d'angle $\alpha = \text{Arg}(a)$ et de rapport $|a|$ de centre z_0.

Remarque

Dans l'exemple g), qui reflète le cas général, le point z_0 est un point fixe de la transformation. Lorsque $a \neq 1$ le nombre $\frac{b}{1-a}$ est le point fixe de la fonction $f(z) = az + b$ et la fonction f se réécrit

$$f(z) = a\left(z - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

La proposition suivante est une conséquence des exemples précédents.

Proposition

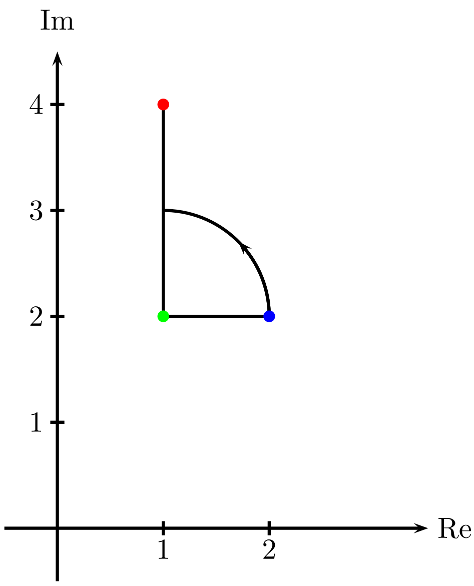
Soit $f(z) = az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$. Alors

a) Si $a = 1$ la fonction f s'interprète comme une translation de vecteur $\vec{b}$ où $\vec{b}$ est l'image vectorielle de b.

b) Si $a \neq 1$ la fonction f s'interprète comme une similitude d'angle α =Arg(a) et de rapport $|a|$ et de centre $\frac{b}{1-a}$. $\square$.

Exemple

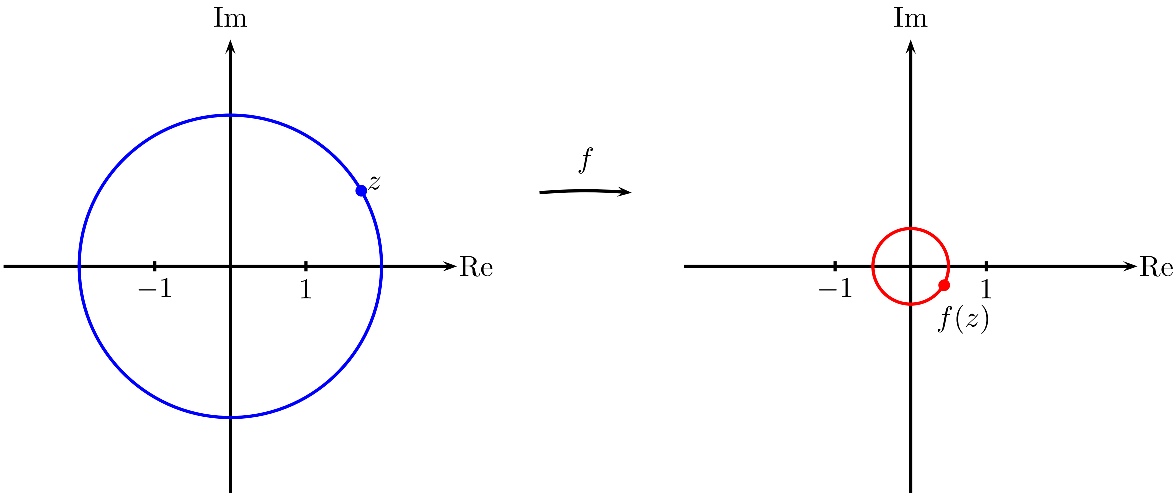
La fonction $f = 2jz + 5$ s'interprète comme une similitude d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, de rapport 2 est de centre $1 + 2j$.



Les fonctions non linéaires ne s'interprètent pas comme des transformations affines du plan et on s'intéresse à la façon dont certaines fonctions transforment des courbes données et « bien choisies ».
On va voir dans les exemples qui suivent que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ transforme des cercles en cercle ou en droite.

Exemples

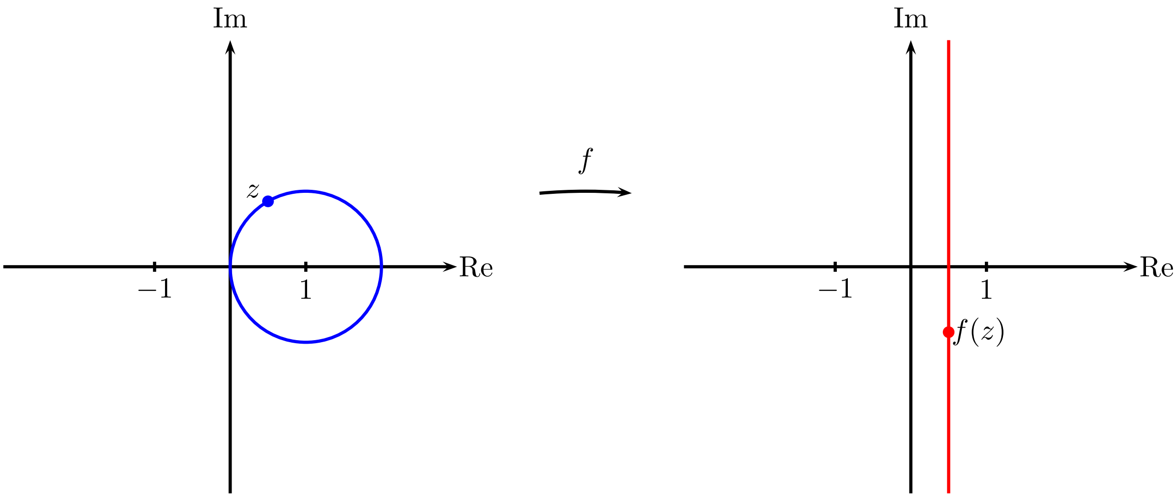
a) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 2 centré à l'origine du plan complexe et représenté à gauche ci-dessous. La fonction f fait correspondre à chaque point $z \in \mathcal{C}$ un point $f(z)$ du plan complexe représenté à droite ci-dessous. Lorsque z parcourt la courbe $\mathcal{C}$ le point $f(z)$ parcourt une courbe $\mathcal{C}$ que l'on veut déterminer. Pour ce faire, on observe que si t parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi]$ le point $z = 2e^{jt}$ parcourt la courbe $\mathcal{C}$. Comme $f(2e^{jt}) = \frac{1}{2}e^{-jt}$ le point $f(z)$ parcourt le cercle $\mathcal{C}$ de rayon $\frac{1}{2}$ centré à l'origine.



b) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon 1 centré en 1. Lorsque t parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi[$ le point $z = 1 + e^{jt}$ parcourt le cercle $\mathcal{C}$ privé de l'orgine. Comme

$$f(1 + e^{jt}) = \frac{1}{1 + e^{jt}} \frac{e^{-j\frac{t}{2}}}{e^{-j\frac{t}{2}}} = \frac{e^{-j\frac{t}{2}}}{e^{-j\frac{t}{2}} + e^{j\frac{t}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) - j\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right))} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

le point $f(z)$ parcourt la droite de partie réelle $\frac{1}{2}$.



Proposition

La fonction $\dfrac{1}{z}$ transforme les droites et cercles en droites ou cercles. $\square$