HAUTE ÉCOLE D'INGÉNIERIE ET DE GESTION DU CANTON DE VAUD

Prof. Eric Boillat - Procédés de fabrication

Date 21.12.2021 - durée : 1h30

Travail écrit

Nom :

- **Tous les documents issus du cours sont admis: polycopié, problèmes et notes personnelles.**
- **Dans le cas de questions nécessitant un développement, il est recommandé de ne pas vous servir des cases officielles comme brouillon. Ne les utilisez que pour y écrire la version définitive de votre solution.**
- **Les étudiants se muniront d'une calculatrice simple sans moyen de communication. Aucun autre appareil électronique n'est autorisé.**

Question	Nombre de points
1)	
Total	

Correction

Question 1 Propriétés mécaniques des matériaux - procédé d'étirage

Vous devez former une barre cylindrique en acier de rayon $r_0 = 15\,\text{mm}$ et de longueur $l_0 = 750\,\text{mm}$. Le matériau en question sort d'un traitement de recuit. Il suit une loi de Ludwik en plasticité et ses caractéristiques mécaniques sont partiellement connues:

limite élastique réelle	module d'écrouissage	coefficient de Poisson
$\sigma_e = 500\,\text{MPa}$	$K = 3.2\,\text{GPa}$	$\nu = 0.45$
coefficient d'écrouissage	taux de déf. réel en rupture	
$n = 0.3$	$\varepsilon_{ult} = 0.41$	

Table 1: Caractéristiques mécaniques du matériau considéré

(a) On vous demande de compléter les données mécaniques du matériau indiquées à la Tab. 1 en calculant:

(1) Le taux de déformation réel ε_e et le module d'élasticité E

Solution

On a que

$$K = E\varepsilon_e^{1-n}. \tag{1}$$

Or ε_e n'est pas connu. A la place on connaît $\sigma_e = E\varepsilon_e$. On en tire que

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \tag{2}$$

et (1) donne:

$$K = E\frac{\sigma_e}{E}^{1-n} = E^n\sigma_e^{1-n}.$$

Si on résoud pour E, on trouve que

$$E^n = \frac{K}{\sigma_e^{1-n}} = \sigma_e^n\frac{K}{\sigma_e}$$

soit en prenant la racine $n^{\text{ème}}$:

$$E = \sigma_e\sqrt[n]{\frac{K}{\sigma_e}}.$$

On peut alors remplacer par les valeurs numériques de $n = 0.3$, $\sigma_e = 500\,\text{MPa}$ et $K = 3200\,\text{MPa}$. Il vient

$$E \simeq 500 \times \sqrt[0.3]{\frac{3200}{500}} \simeq 243352 \text{ MPa} = 243.3 \text{ GPa} \tag{3}$$

On utilise enfin (2) pour calculer ε_e. Cela donne:

$$\varepsilon_e \simeq \frac{500}{243352} \simeq 0.00205. \tag{4}$$

(2) La limite élastique (nominale) R_e,

Solution

La contrainte nominale R_e s'obtient en combinant loi de Hooke (pour calculer la force) et loi de Poisson pour calculer le rapport entre section courante et section initiale:

$$R_\mathrm{e} = \sigma_\mathrm{e} \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon_\mathrm{e}} \simeq 500 \times \mathbf{e}^{-2\times 0.45\times 0.00205} \simeq 499\,\mathrm{MPa}. \tag{5}$$

(3) Le taux de déformation réel ε_m en résistance.

Solution

S'il est plus grand que $\varepsilon_\mathrm{e} = 0.00205$ et plus petit que $\varepsilon_\mathrm{ult} = 0.41$, ce qui est le cas ici, le coefficient d'écrouissage n joue le rôle du taux de déformation réel ε_m en résistance en tous les cas sous l'approximation de **Considère**:

$$\varepsilon_\mathrm{m} = n = 0.3. \tag{6}$$

(4) La résistance R_m,

Solution

Dans l'approximation de Considère, la résistance R_m se déduit du module d'écrouissage par une formule du cours:

$$R_\mathrm{m} = K\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_\mathrm{e}}$$

soit avec les valeurs numériques:

$$R_\mathrm{m} \simeq 3200 \times \left(\frac{0.3}{2.718}\right)^{0.3} \mathbf{e}^{(1-2\times 0.45)\times 0.00205} \simeq 1652.3\,\mathrm{MPa}. \tag{7}$$

(b) Vous effectuez une traction sur la barre mais vous ne pouvez pas dépasser le taux de déformation réel $\varepsilon_\mathrm{max} = 0.27$ car, à ce moment-là, la machine atteint sa charge maximale F_max. On vous demande de calculer ls valeur de F_max.

Solution

On peut déduire la charge en calculant la contrainte nominale R_max mesurée au moment où la machine se bloque et en multipliant le résultat par la section initiale S_0. On a que

$$R_\mathrm{max} = R_\mathrm{m}\left(x\mathbf{e}^{1-x}\right)^n \quad \text{avec} \quad x = \frac{\varepsilon_\mathrm{max}}{n}.$$

Dans notre cas $x = \frac{0.27}{0.3} = 0.9$, $R_\mathrm{m} = 1652.3\,\mathrm{MPa}$ et $n = 0.3$, donc

$$R_\mathrm{max} \simeq 1652.3 \times \left(0.9 \times \mathbf{e}^{1.0-0.9}\right)^{0.3} \simeq 1649.6\,\mathrm{MPa}.$$

et comme

$$S_0 = \pi r_0^2 \simeq 3.14 \times 15^2 \simeq 706\,\mathrm{mm}^2, \tag{8}$$

la conclusion est que

$$\boxed{F_{\max} = R_{\max} S_0 \simeq 1649.6 \times 706 \simeq 1166060\,\mathrm{N} \simeq 1166\,\mathrm{kN}.} \tag{9}$$

soit environ 1.166 MN, ce qui est une force importante.

(c) Pour ne pas endommager votre machine, vous relâchez la force à partir de la valeur $F_{\max}$ et vous sortez la barre. Calculez le taux de déformation permanent ε_{p}, la longueur l_{p}, la section S_{p}, et le volume V_{p} de la barre à sa sortie de machine.

Solution

1) Le taux de déformation permanent ε_{p} se déduit en appliquant l'équation de la déformation permanente:

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{p}} = \varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{r}}^n \varepsilon_{\mathrm{e}}^{1-n} = 0.27 - 0.27^{0.3} \times 0.00205^{1-0.3} \simeq 0.261.} \tag{10}$$

2) La longueur l_{p} se déduit directement de ε_{p}:

$$\boxed{l_{\mathrm{p}} = l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{\mathrm{p}}} \simeq 750 \times \mathbf{e}^{0.261} \simeq 973.7\,\mathrm{mm},} \tag{11}$$

3) Pour calculer la section S_{p}, le plus simple est d'utiliser que les déformations permanentes sont isochores: elles ne modifient pas le volume. Cela signifie que

$$S_{\mathrm{p}} l_{\mathrm{p}} = S_0 l_0.$$

En résolvant pour S_{p} et en utilisant la valeur (8) de S_0:

$$\boxed{S_{\mathrm{p}} = \frac{S_0 l_0}{l_{\mathrm{p}}} \simeq \frac{706 \times 750}{973.7} \simeq 544.4\,\mathrm{mm}^2.} \tag{12}$$

Dans ce contexte on a que:

$$\boxed{V_{\mathrm{p}} = V_0 = S_0 l_0 \simeq 706 \times 750 = 530143\,\mathrm{mm}^3.} \tag{13}$$

Mais on peut aussi appliquer la théorie de Considère pour calculer le volume en relaxation V_{r}:

$$V_{\mathrm{r}} = V_0 \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}} \simeq 530143 \times \mathbf{e}^{(1-2\times 0.45)\times 0.00205} \simeq 530252\,\mathrm{mm}^3. \tag{14}$$

On peut ensuite relier le volume permanent V_{p} à V_{r} en utilisant que la remise en relaxation de la barre est une déformation élastique de taux de déformation $\varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{p}}$. Pour cette déformation, la loi de Poisson s'applique:

$$V_{\mathrm{r}} = V_{\mathrm{p}} \mathbf{e}^{(1-2\nu)(\varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{p}})}.$$

Si on résoud pour V_{p} et qu'on utilise que $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 0.27$ et que $\varepsilon_{\mathrm{p}} = 0.261$ (10), on trouve:

$$\boxed{V_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{r}} \times \mathbf{e}^{-(1-2\nu)(\varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{p}})} \simeq 530252 \times \mathbf{e}^{-(1-2\times 0.45)(0.27-0.261)} \simeq 529782\,\mathrm{mm}^3.} \tag{15}$$

On peut ensuite identifier S_{p} en utilisant que

$$S_{\mathrm{p}} = \frac{V_{\mathrm{p}}}{l_{\mathrm{p}}} \simeq \frac{529782}{973.7} \simeq 544\,\mathrm{mm}, \tag{16}$$

(d) La longueur permanente l_{p} que vous venez d'obtenir ne convient pas encore à votre client. Pour allonger la barre de plus, vous la soumettez à un recuit qui ne modifie pas ses dimensions, puis vous la remettez en traction en utilisant la **même** machine que tout à l'heure. On vous demande de calculer le taux de déformation maximal $\varepsilon_{\mathrm{max};2}$ que vous allez pouvoir atteindre, ainsi que le taux de déformation $\varepsilon_{\mathrm{r};2}$ qu'il faudrait atteindre en relaxation si le souhait de votre client est d'obtenir une barre dont la longueur est de 1230 mm.

Solution

Après le recuit, le matériau de la barre a recouvré ses propriétés mécaniques initiales. En particulier, sa résistance est $R_{\mathrm{m}} = 1652.3\,\mathrm{MPa}$. Cette valeur permet d'évaluer la charge F_2 qui est nécessaire pour faire passer la barre recuite par le point de résistance. Cette charge s'obtient un multipliant la résistance R_{m} par la section $S_{0;2}$ de la barre recuite au début de sa mise en traction. Comme l'opération de recuit n'a pas modifié sensiblement les dimensions de la barre, $S_{0;2}$ correspond à la section permanente S_{p} obtenue après la relaxation de la première traction. D'après (12) on a donc

$$S_{0;2} = S_{\mathrm{p}} \simeq 544.4\,\mathrm{mm}^2 \tag{17}$$

et la conclusion est que

$$F_2 = R_{\mathrm{m}} S_{0;2} \simeq 1652.3 \times 544.4 \simeq 899530\,\mathrm{N} \simeq 0.8995\,\mathrm{MN}. \tag{18}$$

Comme cette charge est nettement inférieure à la force de $F_{\mathrm{max}} \simeq 1.166\,\mathrm{MN}$ que notre machine peut développer (9), nous arriverons à amener la barre en rupture. Autrement dit, le taux de déformation maximal atteignable sur la deuxième barre sera:

$$\varepsilon_{\mathrm{max};2} = \varepsilon_{\mathrm{ult}} = 0.41. \tag{19}$$

Remarque *Si on avait observé que*

$$F_2 = R_{\mathrm{m}} S_{0;2} > F_{\mathrm{max}}$$

alors il aurait fallu appliqué l'algorithme vu au cours pour trouver $\varepsilon_{\mathrm{max};2}$. Cet algorithme consiste à poser

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{e}} \sqrt[n]{\frac{F_{\mathrm{max}}}{F_2}} \quad \text{et} \quad x_0 = \alpha \tag{20}$$

et à construire la suite $\{x_m\}_{m=0}^{m=\infty}$ en appliquant la règle

$$x_{m+1} = \alpha \mathbf{e}^{x_m}$$

pour passer de x_m à x_{m+1}. La limite de cette suite est $\bar{x}$ et on a que

$$\varepsilon_{\mathrm{max};2} = n\bar{x}.$$

*Si on avait appliqué l'algorithme dans notre situation où $F_2 > F_{\max}$ (18), on aurait commencer par remarqué que le paramètre α était superieur à $\frac{1}{\mathbf{e}}$ et l'algorithme n'aurait **pas convergé**.*

Comme l'opération de recuit ne modifie pas les dimensions, la longueur initiale $l_{0;2}$ au début de la seconde traction est égale à la longueur permanente l_{p} atteinte après la relaxation de la première traction. Si la longueur finale de la barre doit être de $l_{\mathrm{p};2} = 1230\,\mathrm{mm}$, on en conclut que le taux de déformation permanent auquel doit amener le second formage est

$$\varepsilon_{\mathrm{p};2} = \ln \tfrac{l_{\mathrm{p};2}}{l_{0;2}} = \ln \tfrac{l_{\mathrm{p};2}}{l_{\mathrm{p}}} \simeq \ln \tfrac{1230}{973.7} \simeq 0.233. \tag{21}$$

Le taux $\varepsilon_{\mathrm{r};2}$ en lequel la deuxième traction doit être relâchée s'obtient alors en résolvant l'équation de la déformation permanente:

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{p};2}}{\varepsilon_{\mathrm{e};2}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r};2}}{\varepsilon_{\mathrm{e}}} - \left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r};2}}{\varepsilon_{\mathrm{e}}}\right)^{n_2} \tag{22}$$

où $\varepsilon_{\mathrm{e}:2}$ et n_2 sont respectivement le taux de déformation réel en limite élastique et le coefficient d'écrouissage du matériau constituant la barre au moment où elle subit la seconde traction. Comme cette barre a été **recuite**, ces quantités sont rigoureusement identiques à celles qui caractérisaient la barre au moment de la première traction, soit:

$$\varepsilon_{\mathrm{e};2} = \varepsilon_{\mathrm{e}} = 0.00205 \quad \text{et} \quad n_2 = n = 0.3 \tag{23}$$

Pour trouver $\varepsilon_{\mathrm{r};2}$ on applique alors l'algorithme du cours. On pose

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{\mathrm{p};2}}{\varepsilon_{\mathrm{e};2}} \simeq \frac{0.233}{0.00205} \simeq 113.68202$$

puis on pose $x_0 = \alpha$ et on construit x_m à partir de x_{m-1}, $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ en appliquant la règle:

$$x_m = \alpha + x_{m-1}^{0.3}. \tag{24}$$

La solution de $\varepsilon_{\mathrm{r};2}$ de (22) est égale à la limite de la suite $\{x_m\}_{m=0}^{m=\infty}$ amplifiée par $\varepsilon_{\mathrm{e};2} = 0.00205$. On trouve:

m	x_m	$\varepsilon_{\mathrm{e};2} x_m$
0	113.6820	0.233574
1	117.8192	0.242074
2	117.8638	0.242166
3	117.8643	0.242167

Table 2: Les premières itérations de l'algorithme (24)

La conclusion de la Tab. 2 est que

$$\varepsilon_{\mathrm{r};2} = \varepsilon_{\mathrm{e};2} \lim_{m\to\infty} x_m \simeq 0.2429 \tag{25}$$

Puisque la longueur initiale de la barre en début de deuxième traction est $l_{\mathrm{p}} = 973.7\,\mathrm{mm}$, k on trouve que la longueur de relaxation est

$$l_{\mathrm{r};2} = l_{\mathrm{p}} \mathbf{e}^{\varepsilon_{\mathrm{r};2}} \simeq 973.7 \times \mathbf{e}^{0.2429} \simeq 1240.6\,\mathrm{mm} \tag{26}$$

(e) Est-ce que la seconde traction que vous venez de planifier est réalisable? A quoi devez-vous prendre garde?

Solution

Comme la valeur du taux de déformation $\varepsilon_{\mathrm{r};2}$ à atteindre en relaxation est inférieure au taux de déformation en rupture:

$$\varepsilon_{\mathrm{r};2} = 0.2429 < \varepsilon_{\mathrm{ult}} = 0.41 \tag{27}$$

on pourra satisfaire les besoins de notre client à la suite de la seconde traction, sans qu'on ait besoin d'effectuer un nouveau recuit.

(f) Vous devez remplir la fiche de propriétés matières pour la barre que vous livrez à votre client. Quelles valeurs indiquez-vous pour avec son module délasticité E'

(1) Le module d'élasticité E'?

Solution

$$E' = 243.3\,\mathrm{GPa} \text{ (invariant d'écrouissage)} \tag{28}$$

(2) Le coefficient d'écrouissage n'?

Solution

$$n' = 0.3 \text{ (invariant d'écrouissage)} \tag{29}$$

(3) Le coefficient de Poisson ν'?

Solution

$$\nu' = 0.45 \text{ (invariant d'écrouissage)} \tag{30}$$

(4) Le taux de déformation réel $\varepsilon'_{\mathrm{e}}$ en limite élastique?

Solution

$$\varepsilon'_{\mathrm{e}} = \varepsilon_{\mathrm{e}} \left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{e}}}\right)^{n} \simeq 0.00205 \times \left(\frac{0.27}{0.00205}\right)^{0.3} \simeq 0.0086 \tag{31}$$

(5) Le module d'écrouissage K',

Solution

$$K' = E'{\varepsilon'_{\mathrm{e}}}^{1-n} \simeq 243.3 \times 0.0086^{1-0.3} \simeq 8.712\,\mathrm{Gpa} \tag{32}$$

(g) Donner une évaluation de l'énergie $E_{\mathrm{tr};1}$ nécessaire à effectuer la première traction (jusqu'à $\varepsilon_{\max}$ (cf. item (b))).

Solution

L'énergie de déformation $E_{\mathrm{tr};1}$ s'estime par le haut et par la bas en mutlipliant l'énergie spécifique de déformation η_1 d'abord par le plus petit volume que la barre prend, i.e son volume initial V_0 puis par son plus grand volume, i.e le volume final V_{r} (14) atteint au moment de la relaxation:

$$V_0\eta_1 \leq E_{\mathrm{tr};1} \leq V_{\mathrm{r}}\eta_1. \tag{33}$$

L'énergie spécifique de déformation est l'aire sous la courbe de traction **réelle** entre les abscisses $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{r}}$:

$$\eta_1 = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \sigma(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon,$$

où

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{e}}, \\ K\varepsilon^n, & \varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{e}}. \end{cases}$$

La conclusion est que

$$\eta_1 = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{e}}} E\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon + \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{e}}} K\varepsilon^n\,\mathrm{d}\varepsilon$$

soit en effectuant les quadratures et en utilisant les valeurs de $E \simeq 243.3\,\mathrm{GPa}$, $\varepsilon_{\mathrm{e}} = 0.00205$, $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \varepsilon_{\max} = 0.27$, $n = 0.3$ et $K \simeq 3.2\,\mathrm{GPa}$:

$$\eta_1 = \frac{E}{2}\varepsilon_{\mathrm{e}}^2 + \frac{K}{n+1}\left(\varepsilon_{\mathrm{r}}^{n+1} - \varepsilon_{\mathrm{e}}^{n+1}\right) \simeq \frac{243.3}{2} \times 0.00205^2 + \frac{3.2}{1.3} \times \left(0.27^{1.3} - 0.00205^{1.3}\right).$$

Tous calculs faits, il vient:

$$\eta_1 \simeq 0.448\,\mathrm{GPa} = 0.448\,\mathrm{J/mm}^3.$$

Avec cette valeur numérique et celles (14) et (13) de V_{r} et, respectivement, V_0, l'estimation cherchée (33) est

$$530143 \times 0.448 \simeq 237741\,\mathrm{J} \leq E_{\mathrm{tr};1} \leq 530252 \times 0.448 \simeq 237790\,\mathrm{J}.$$

En résumé

$$237741\,\mathrm{J} \leq E_{\mathrm{tr};1} \leq 237790\,\mathrm{J}. \tag{34}$$