CORRECTION

HAUTE ÉCOLE D'INGÉNIERIE ET DE GESTION DU CANTON DE VAUD

Prof. Eric Boillat - Procédés de fabrication

Date 06.12.2024 - durée : 1h30

Travail écrit

Nom :

- **Tous les documents issus du cours sont admis: polycopié, problèmes et notes personnelles.**
- **Dans le cas de questions nécessitant un développement, il est recommandé de ne pas vous servir des cases officielles comme brouillon. Ne les utilisez que pour y écrire la version définitive de votre solution.**
- **Les étudiants se muniront d'une calculatrice simple sans moyen de communication. Aucun autre appareil électronique n'est autorisé.**

Question	Nombre de points
1)	
Total	

Correction

Question 1 Caractérisation d'un matériau et mise en oeuvre d'une production

On soumet à une expérience de traction un échantillon cylindrique de longueur $\ell_0 = 100\,\text{mm}$ et de volume $V_0 = 10'000\,\text{mm}^3$ fait dans un matériau $\mathcal{M}$ qui est incompressible. La courbe de la Fig. 1 représente la valeur de la contrainte en fonction du taux de déformation réel ε.

a) Dites si la contrainte représentée sur le graphe de la Fig. 1 est la contrainte réelle ou bien la contrainte nominale. Sur quelle indice basez-vous votre réponse?

Solution
Il s'agit de la contrainte réelle en raison notamment de la montée élastique linéaire.

b) **Cycle élastique.** Vous effectuez un premier cycle de déformation qui amène l'échantillon à la limite élastique et vous mesurez le travail A_e que cette opération vous coûte. On prétend que le rapport $\eta_\mathrm{e} = \frac{A_\mathrm{e}}{V_0}$ correspond à une caractéristique géométrique particulière de la courbe représentée sur la graphe de la Fig. 1. Dessinez cette caractéristique en bleu.

Solution
Cette caractéristique est l'aire du triangle rectangle OAB (cf. Fig. 1).

c) **Cycle de fort écrouissage.** Vous effectuez un second cycle de déformation qui amène l'échantillon en quasi-rupture où vous mesurez une longueur de $\ell_{\mathrm{ult}} = 125\,\text{mm}$. Vous relâchez la force précautionneusement avant de sortir l'échantillon de la machine. A ce moment-là, l'échantillon mesure $\ell_{\mathrm{p;ult}} = 123\,\text{mm}$.

1) On vous demande de représenter ce cycle en rouge sur la courbe déformation-contrainte de la Fig. 1.
2) Calculez les taux de déformation réels $\varepsilon_{\mathrm{ult}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$ et placez ces valeurs très précisément sur l'axe horizontal de la Fig. 1.

Solution
On a que

$$\varepsilon_{\mathrm{ult}} = \ln \frac{\ell_{\mathrm{ult}}}{\ell_0} = \ln \frac{125}{100} \approx 0.223 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{p;ult}} = \ln \frac{\ell_{\mathrm{p;ult}}}{\ell_0} = \ln \frac{123}{100} \approx 0.207 \qquad (2)$$

3) Vous mesurez le travail qui vous est **rendu** par la barre lors de la relaxation. Vous trouvez la valeur A_{rel}.
Attention: *A_{rel} est le travail rendu lors de la relaxation, ne le confondez pas avec le travail à **fournir** pour amener la barre en quasi-rupture.*
On prétend à nouveau que le rapport $\eta_{\mathrm{rel}} = \frac{A_{\mathrm{rel}}}{V_0}$ correspond à une caractéristique géométrique particulière de la courbe représentée sur la graphe de la Fig. 1. Dessinez cette caractéristique en bleu.
4) La valeur de A_{rel} que vous avez mesurée est $A_{\mathrm{rel}} = 124\,\text{J}$. On vous demande d'en déduire le module d'Young du matériau $\mathcal{M}$ en GPa.

Solution

Le rapport $\frac{A_{\text{rel}}}{V_0}$ est l'aire du triangle rectangle PQR (cf. Fig. 1) dont E est la pente de l'hypothénuse et dont la cathète horizontale est de longueur $\varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_{\text{p;ult}}$. On a donc

$$\frac{A_{\text{rel}}}{V_0} = \frac{1}{2} E(\varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_{\text{p;ult}})^2$$

Si on résout pour E et qu'on utilise les valeurs numériques de A_{rel} de V_0 et de $\varepsilon_{\text{ult}}, \varepsilon_{\text{p;ult}}$ (cf. (1) et (2)) on trouve que

$$E = \frac{2A_{\text{rel}}}{V_0(\varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_{\text{p;ult}})^2} \approx \frac{2 \times 124}{10'000 \times (0.223 - 0.207)} \approx 95.32\,\text{J/mm}^3 = 95.32\,\text{GPa}. \tag{3}$$

5) La contrainte réelle de traction ultime σ_{ult} correspond aussi à une caractéristique essentielle de la courbe représentée sur la graphe de la Fig. 1. Dessinez cette caractéristique en vert puis calculez la valeur de σ_{ult} en MPa.

Solution

La grandeur σ_{ult} est la longueur de la cathète verticale du triangle rectangle PQR (cf. Fig. 1). Comme la pente de l'hypothénuse de ce triangle est E et que la longueur de sa cathète horizontale est $\varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_{\text{p;ult}}$, on a donc que

$$\sigma_{\text{ult}} = E(\varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_{\text{p;ult}})$$

soit, si on utilise les valeurs numériques de $E, \varepsilon_{\text{ult}}$ et $\varepsilon_{\text{p;ult}}$ (cf. (3), (1) et (2)):

$$\sigma_{\text{ult}} \approx 95.32 \times (0.223 - 0.207) \approx 1.537\,\text{GPa} = 1537\,\text{MPa}. \tag{4}$$

d) **Analyse des propriétés élastiques.** La valeur précise du travail que vous avez fourni lors du premier cycle de traction (i.e le cycle élastique (cf. item b)) est de $A_{\text{e}} = 40\,\text{J}$.

1) Utilisez cette information ainsi que toutes celles obtenues jusqu'à présent pour calculer la limite élastique **réelle** du matériau $\mathcal{M}$. Donnez cette valeur en MPa.

Solution

La limite élastique réelle σ_{e} est la cathète verticale du triangle rectangle OAB (cf. Fig. 1) dont l'aire vaut $\frac{A_{\text{e}}}{V_0}$ (cf. item b)) et dont l'hypothénuse a une pente égale au module de Young E. On a donc

$$\frac{A_{\text{e}}}{V_0} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{\text{e}}^2}{E}$$

Si on résout pour σ_{e} et qu'on utilise les valeurs numériques de A_{e} de V_0 et de E (cf. (3)), on trouve que

$$\sigma_{\text{e}} = \sqrt{\frac{2EA_{\text{e}}}{V_0}} \approx \sqrt{\frac{2 \times 95.32 \times 40}{1000}} \approx 0.873\,\text{GPa} = 873\,\text{MPa}. \tag{5}$$

2) Calculez le taux de déformation réel en limite élastique ainsi que la longueur ℓ_e de la barre au moment où vous avez commencé à relâcher la force lors du premier cycle de traction (cf. item b)).

Solution

Pour trouver ℓ_e, il faut commencer par calculer le taux de déformation réel en limite élastique ε_e. Pour cela, on applique la loi de Hooke:

$$\sigma_e = E\varepsilon_e.$$

Si on résout pour ε_e et qu'on utilise les valeurs numériques déjà obtenues pour σ_e (5) et E (3), on trouve que

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \approx \frac{0.873}{95.32} \approx 0.00916. \tag{6}$$

On utilise alors la définition du taux de déformation réel:

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell_e}{\ell_0}.$$

On résout pour ℓ_e et on tient compte que $\ell_0 = 100\,\text{mm}$ et que $\varepsilon_e \approx 0.00916$, on trouve que

$$\ell_e = \ell_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_e} \approx 100.92\,\text{mm}. \tag{7}$$

3) Utilisez toutes les informations numériques obtenues jusqu'ici pour calculer la limite élastique du matériau $\mathcal{M}$. Donnez le résultat en MPa.

Solution

Puisque le matériau est incompressible ($\nu = 0.5$), on a que $R_e = \sigma_e \mathbf{e}^{-\varepsilon_e}$. En tenant compte des valeurs numériques obtenues pour σ_e et ε_e (cf. (5) et (6)), on obtient que

$$R_e \approx 873 \times \mathbf{e}^{-0.00916} \approx 865\,\text{MPa}. \tag{8}$$

e) **Analyse des propriétés plastiques.** On suppose dorénavant que le matériau $\mathcal{M}$ suit un loi de Ludwik en écrouissage.

1) Observez dans ce cas que la relation entre les rapports $\frac{\sigma_{ult}}{\sigma_e}$ et $\frac{\varepsilon_{ult}}{\varepsilon_e}$ ne dépend que du coefficient d'écrouissage:

Solution

La loi de Ludwik dit que $\sigma_{ult} = K\varepsilon_{ult}^n$ et que $\sigma_{ult} = K\varepsilon_{ult}^n$. Dans ces conditions on a que:

$$\frac{\sigma_{ult}}{\sigma_e} = \frac{K\varepsilon_{ult}^n}{K\varepsilon_e^n} = \left(\frac{\varepsilon_{ult}}{\varepsilon_e}\right)^n. \tag{9}$$

2) Utilisez les valeurs numériques que vous avez déjà obtenues pour les contraintes $\sigma_{\text{ult}}, \sigma_{\text{e}}$ (cf. items c5)) et d1)) et pour les taux $\varepsilon_{\text{ult}}, \varepsilon_{\text{e}}$ (cf. items c2) et d2)) pour déduire la valeur du coefficient d'écrouissage de l'observation que vous venez de faire (cf. item e1)).
Indication:*pensez à utiliser le logarithme.*

Solution
Il suffit de prendre le logarithme de l'équation (9). Cela donne:

$$\ln \frac{\sigma_{\text{ult}}}{\sigma_{\text{e}}} = n \ln \frac{\varepsilon_{\text{ult}}}{\varepsilon_{\text{e}}}$$

On résout alors pour n, cela donne:

$$n = \frac{\ln \frac{\sigma_{\text{ult}}}{\sigma_{\text{e}}}}{\ln \frac{\varepsilon_{\text{ult}}}{\ln \varepsilon_{\text{e}}}} \approx \frac{\ln \frac{1.537}{0.873}}{\ln \frac{0.223}{0.00916}} \approx 0.184. \tag{10}$$

3) Utilisez toutes les informations déjà obtenues pour calculer en unité de MPa

i) le module d'écrouissage du matériau $\mathcal{M}$,

Solution
Le module d'écrouissage est lié au module d'Young par la formule

$$K = E\varepsilon_{\text{e}}^{1-n}.$$

Avec les valeurs numériques de E (3), de ε_{e} (6) et de n (10), on trouve

$$K \approx 95.32(0.00916)^{1.0-0.184} \approx 2.070\,\text{GPa} = 2'070\,\text{MPa}. \tag{11}$$

ii) la résistance du matériau $\mathcal{M}$,

Solution
Puisque le matériau est incompressible ($\nu = 0.5$), la résistance R_{m} est elle liée au module d'écrouissage par la formule

$$R_{\text{m}} = K \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^{n}.$$

Utilisant la valeur de K qu'on vient de trouver (11) ainsi que la valeur numérique de n (10), on obtient:

$$R_{\text{m}} \approx 2'070 \left(\frac{0.184}{2.718}\right)^{0.184} \approx 1'261\,\text{MPa}. \tag{12}$$

iii) la contrainte nominale en rupture du matériau $\mathcal{M}$.

Solution

La contrainte nominale en rupture du matériau est lié à la résistance R_m par la formule

$$R_\mathrm{ult} = R_\mathrm{m}\left(\frac{\varepsilon_\mathrm{ult}}{n}\mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon_\mathrm{ult}}{n}}\right)^n$$

On utilise les valeurs numériques de ε_ult (1), de n (10) et de R_m (12). On obtient

$$R_\mathrm{ult} \approx 1'261\left(\frac{0.223}{0.184}\mathbf{e}^{1.0-\frac{0.223}{0.184}}\right)^{0.184} \approx 1'236\,\mathrm{MPa}. \tag{13}$$

f) **Production.** Vous passez cette fois à une opération de fabrication. Il s'agit d'étirer des barres de longueur initiale $L_0 = 1'000\,\mathrm{mm}$ et de section initiale $S_0 = 500\,\mathrm{mm}^2$. La machine que vous utilisez est capable d'appliquer une force $F_\mathrm{max} = 625\,\mathrm{kN}$.

1) Calculez le taux de déformation réel maximal que vous pouvez appliquer aux barres (avant relaxation).

Solution

Le rapport

$$\frac{F_\mathrm{max}}{S_0} = \frac{625'000}{500} = 1'250\,\mathrm{MPa}$$

étant compris entre la limite élastique nominale $R_\mathrm{e} = 865\,\mathrm{MPa}$ (8) et la résistance $R_\mathrm{m} = 1'261\,\mathrm{MPa}$ (12) (cf. 8), on trouve le taux de déformation réel maximal ε_max avant relaxation en appliquant l'algorithme vu au cours. On calcule

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{e}}\sqrt[n]{\frac{F_\mathrm{max}}{R_\mathrm{m}S_0}} \approx \frac{1}{2.718}\sqrt[0.184]{\frac{1'250}{1'261}} \approx 0.104313$$

puis applique la récurrence $x_{n+1} = \alpha\mathbf{e}^{x_n}$ initialisée à partir de $x_n = \alpha$. On trouve les résultats suivants

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0.498	0.577	0.624	0.655	0.675	0.689	0.698
n	7	8	9	10	11	12	13
x_n	0.705	0.710	0.713	0.716	0.717	0.719	0.719

Table 1: Les quatorzes premières itérations de l'algorithme

A trois chiffres significatifs, la limite de la suite de récurrence semble être $\bar{x} = 0.719$. On en déduit alors que

$$\varepsilon_\mathrm{max} = n\bar{x} \approx 0.184 \times 0.719 \approx 0.132. \tag{14}$$

2) Calculez le taux de déformation réel maximal que vous pouvez appliquer de façon permanente à vos barres.

Solution

Le taux de déformation maximal permanent $\varepsilon_{\mathrm{p;max}}$ est lié à $\varepsilon_{\max}$ par l'équation de la déformation permanente:

$$\varepsilon_{\mathrm{p;max}} = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\max}^{n}\varepsilon_{\mathrm{e}}^{1-n}.$$

Cela veut dire, avec les valeurs numériques qu'on connaît pour n (10), ε_{e} (6) et $\varepsilon_{\max}$ (14), que

$$\varepsilon_{\mathrm{p;max}} \approx 0.132 - 0.132^{0.184} \times 0.00916^{1.0-0.184} \approx 0.117. \tag{15}$$

3) Vous appliquez à une barre donnée dix cycles d'étirage maximum entre lesquels vous intercalez un traitement thermique de recuit. On vous demande de calculer la longueur finale de la barre.

Solution

A chacune de $N = 10$ opérations on allonge la barre du taux réel permanent $\varepsilon_{\mathrm{p;max}} = 0.0117$ (cf. (15)). Puisque les taux réels s'additionnent, on obtiendra à la fin un taux de déformation réel $\varepsilon_{\mathrm{f}} = N\varepsilon_{\mathrm{p;max}}$ soit

$$\varepsilon_{\mathrm{f}} \approx 10 \times 0.117 = 1.17.$$

La longueur finale L_{f} de la barre s'obtient en résolvant l'équation qui définit le taux de déformation réel:

$$\varepsilon_{\mathrm{f}} = \ln \frac{L_{\mathrm{f}}}{L_0}$$

et en utilisant qu'ici $L_0 = 1'000\,\mathrm{mm}$:

$$L_{\mathrm{f}} \approx 1'000\mathbf{e}^{1.17} \approx 3'221\,\mathrm{mm}.$$

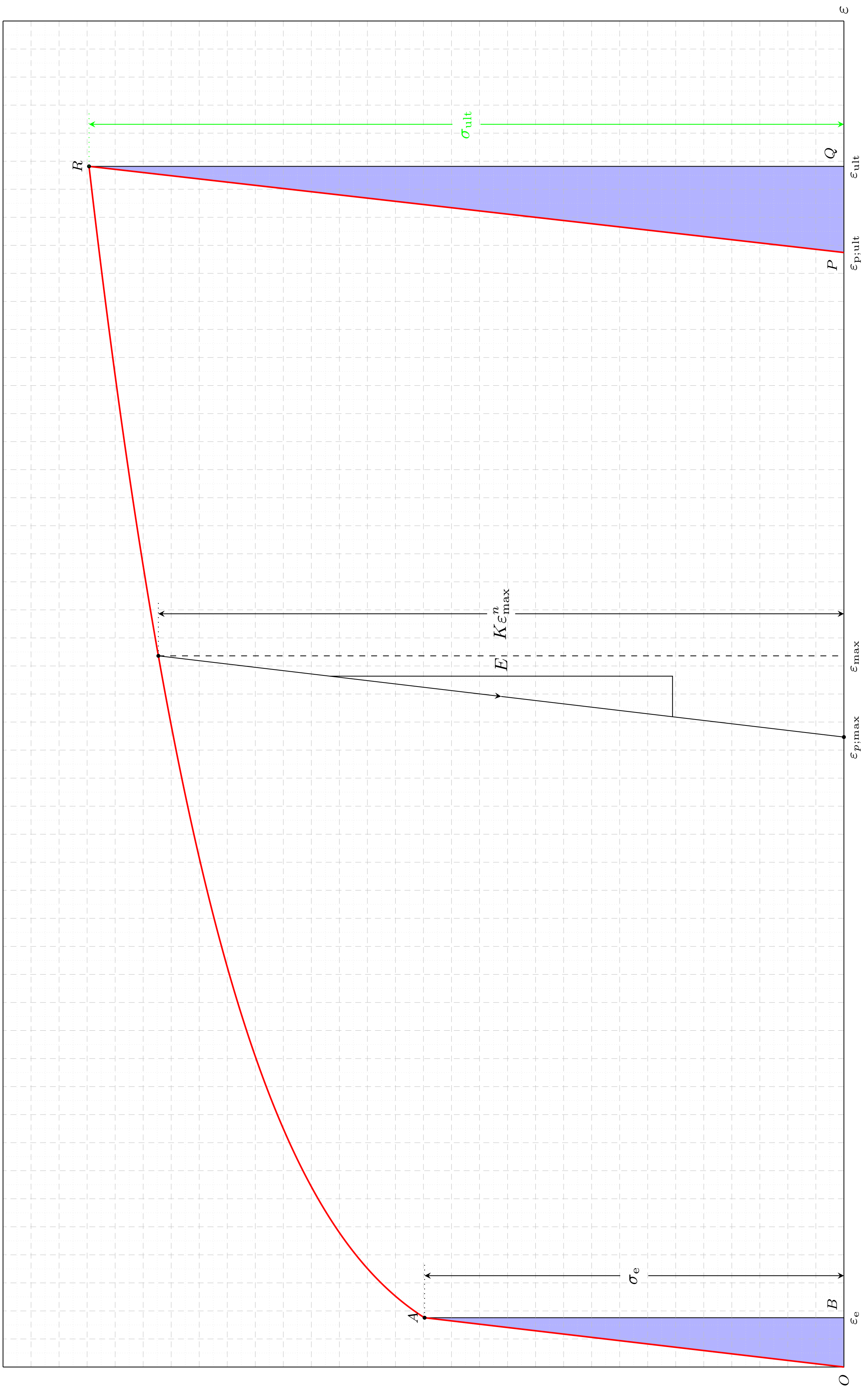

Figure 1: Courbe de traction . . .