HAUTE ÉCOLE D'INGÉNIERIE ET DE GESTION DU CANTON DE VAUD

Prof. Eric Boillat - Procédés de fabrication

Date 24.11.2023 - durée : 1h30

Travail écrit

Nom :

- **Tous les documents issus du cours sont admis: polycopié, problèmes et notes personnelles.**
- **Dans le cas de questions nécessitant un développement, il est recommandé de ne pas vous servir des cases officielles comme brouillon. Ne les utilisez que pour y écrire la version définitive de votre solution.**
- **Les étudiants se muniront d'une calculatrice simple sans moyen de communication. Aucun autre appareil électronique n'est autorisé.**

Question	Nombre de points
1)	
Total	

Correction

Question 1 Manipulation des propriétés mécaniques

On effectue une expérience de traction sur une barre $\mathcal{B}$ de longueur l_0 et de rayon initiaux r_0 connus (cf. Tab. 1).

- Dans un premier temps, cette barre est amenée en l'état de limite élastique au tout début de la transition plastique. A ce moment-là, on mesure ses nouvelles dimensions ainsi que la force de traction qui est appliquée par la machine. Les résultats sont aussi indiqués à la Tab. 1.
- Dans un second temps, on amène la barre dans l'état où la force que la machine doit exercer est maximale. Dans cet état, on mesure la longueur de la barre. Cette valeur se trouve dans la Tab. 1.

Données initiales		
longueur		rayon
$l_0 = 1000.0\,\mathrm{mm}$		$r_0 = 10.0\,\mathrm{mm}$
Mesures en limite élastique		
longueur	rayon	force de traction
$l_\mathrm{e} = 1008.0\,\mathrm{mm}$	$r_\mathrm{e} = 9.98\,\mathrm{mm}$	$F_\mathrm{e} = 9.98\,\mathrm{kN}$
Mesures en état de force maximale		
	longueur	
	$l_\mathrm{m} = 1123.0\,\mathrm{mm}$	

Table 1: Les données initiales de la barre et les mesures en limite élastique et en résistance

On considérera qu'en écrouissage les lois de Ludwik et de Considère s'appliquent à la barre $\mathcal{B}$.

a) Les Figs. 1 et 2 représentent deux courbes de traction en rapport avec le matériau $\mathcal{M}$ dont est fait votre barre. Prenez garde au fait que ces courbes ne sont **pas à l'échelle**! Ce sont des allégories qui vous permettent de dessiner dans de bonnes conditions mais pas d'obtenir des quantités réelles par mesure. On vous demande les choses suivantes:

1) L'une des ces courbes est la courbe de traction réelle, l'autre la courbe de traction nominale. Indiquez dans les légendes laquelle est laquelle et ajoutez les titres des axes (nom, unité et symbole de la quantité représentée) dans les boîtes prévues à cet effet.

Solution

Qu. No	**Nom**	**Symbole**	**Valeur/unité**
①	taux de déformation réel en limite élastique	ε_e	0.0079,-
②	taux de déformation réel en limite élastique	ε_e	0.0079,-
③	limite élastique nominale	R_e	31.76 MPa
④	limite élastique réelle	σ_e	31.89 MPa
⑤	module d'élasticité	E	4.002 GPa

Table 2: Caractéristiques mécaniques de barre

2) Cinq cotes ou pentes inconnues notées ①-⑤ sont dessinées sur les Figs. 1 et 2. Elles correspondent toutes à des caractéristiques mécaniques du matériau $\mathcal{M}$. On vous demande de remplir la Tab. ci-dessus avec les noms, les symboles, les valeurs et les unités de ces quantités. Les valeurs numériques[1] doivent être déduites des données de la Tab. 1.

Solution

Raisonnements/formules

- $\varepsilon_\mathrm{e} = \ln \dfrac{l_\mathrm{e}}{l_0} \approx \ln \dfrac{1008.0}{1000.0} \approx 0.0079.$
- $R_\mathrm{e} = \dfrac{F_\mathrm{e}}{S_0} = \dfrac{F_\mathrm{e}}{\pi r_0^2} \approx \dfrac{9980}{3.14 \times 10.0^2} \approx 31.76\,\mathrm{MPa}$
- $\sigma_\mathrm{e} = \dfrac{F_\mathrm{e}}{S_\mathrm{e}} = \dfrac{F_\mathrm{e}}{\pi r_\mathrm{e}^2} \approx \dfrac{9980}{3.14 \times 9.98^2} \approx 31.89\,\mathrm{MPa}$
- $E = \dfrac{\sigma_\mathrm{e}}{\varepsilon_\mathrm{e}} \approx \dfrac{31.89}{0.0079} \approx 4002\,\mathrm{MPa} \approx 4.002\,\mathrm{GPa}$

b) On s'intéresse maintenant au coefficient de Poisson du matériau $\mathcal{M}$. Servez-vous des données de la Tab. 1 pour le calculer.

Solution

La loi de Poisson: $\frac{r_\mathrm{e}}{r_0} = \left(\frac{l_\mathrm{e}}{l_0}\right)^{-\nu}$ implique que

$$\ln \frac{r_\mathrm{e}}{r_0} = -\nu \ln \frac{l_\mathrm{e}}{l_0} \Longrightarrow \nu = -\frac{\ln r_\mathrm{e}/r_0}{\ln l_\mathrm{e}/l_0}$$

soit numériquement:

$$\nu = -\frac{\ln 9.98/10.0}{\ln 1008.0/1000.0} \approx 0.251.$$

c) Le coefficient d'écrouissage correspond à une cote précise sur l'une des deux Figs. 1 ou 2. Dessinez cette cote en vert et déduisez sa valeur à partir des données de la Tab. 1.

Solution

Sous les lois de Ludwik et de Considère le coefficient d'écrouissage correspond au taux de déformation en résistance ε_m:

$$n = \varepsilon_\mathrm{m} = \ln \frac{l_\mathrm{m}}{l_0} \approx \ln \frac{1123.0}{1000.0} \approx 0.116.$$

d) Que vaut le module d'écrouissage du matériau $\mathcal{M}$?

[1] Indiquez brièvement les raisonnements/formules que vous utilisez pour calculez ces valeurs. Si le résultat numérique est faux mais le raisonnement correct, vous aurez tous les points.

Solution

Le module d'écrouissage est lié à celui d'élasticité E:

$$K = E\varepsilon_{\mathrm{e}}^{1-n} \approx 4002 \times 0.0079^{(1-0.116)} \approx 55.86\,\mathrm{MPa}.$$

e) La résistance du matériau $\mathcal{M}$ correspond à une cote précise sur l'une des deux Figs. 1 ou 2. Dessinez cette cote en rouge et calculez la résistance à partir des grandeurs déterminées jusqu'ici.

Solution

Sous les lois de Ludwik et de Considère, la résistance dépend du module et du coefficient d'écrouissage:

$$R_{\mathrm{m}} = K\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^{n} \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}} \approx 55.86\left(\frac{0.116}{\mathbf{e}}\right)^{0.116} \times \mathbf{e}^{(1 - 2 \times 0.251 \approx 38.90) \times 0.0079}$$

soit

$$R_{\mathrm{m}} \approx 38.90\,\mathrm{MPa}.$$

f) Calculez la force F_{m} que développe la machine au moment où la longueur de la barre est l_{m}.

Solution

On a que

$$F_{\mathrm{m}} = R_{\mathrm{m}} S_0 = R_{\mathrm{m}} \pi r_0^2 \approx 38.90 \times 3.14 \times 10.0^2 \approx 12221\,\mathrm{N} \approx 12.221\,\mathrm{kN}.$$

g) Calculez le rayon r_{m} de la barre au moment où la force maximale est appliquée.

Solution

Il faut appliquer la loi de Considère qui rend compte du fait que le volume ne change pas en plasticité:

$$r_{\mathrm{m}} = r_0 \mathbf{e}^{\frac{1-2\nu}{2}\varepsilon_{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}n} \approx 10.0\mathbf{e}^{\frac{1-2\times 0.251}{2} \times 0.0079 - \frac{1}{2} \times 0.116} \approx 9.455\,\mathrm{mm}$$

h) Vous décidez d'interrompre l'expérience de traction au moment où la machine applique une force $\bar{F}$ égale à la moyenne des forces F_{e} et F_{m} où F_{m} est la force maximale que vous avez calculée à l'item f)) et F_{e} la force en limite élastique qui a déjà été mesurée (cf. Tab. 1).

1) Le taux de déformation $\bar{\varepsilon}$ que vous atteignez à ce moment-là correspond à une cote particulière sur l'une des deux Figs. 1 ou 2. Effectuez en vert la construction géométrique qui permet de dessiner cette cote.

2) Est-il possible d'obtenir une valeur numérique précise de $\bar{\varepsilon}$? Si oui calculez-la.

Solution

Le taux de déformation $\bar{\varepsilon}$ atteint lorsque la force vaut

$$\bar{F} = \frac{F_{\mathrm{e}} + F_{\mathrm{m}}}{2} = \frac{R_{\mathrm{e}} + R_{\mathrm{m}}}{2} S_0$$

est solution de l'équation de la déformation maximale:

$$\frac{\bar{F}}{S_0} = R_{\mathrm{m}} \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{n} \mathbf{e}^{1 - \frac{\bar{\varepsilon}}{n}} \right)^n. \qquad (1)$$

On résout cette équation de façon itérative en posant

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{e}} \sqrt[n]{\frac{\bar{F}}{R_{\mathrm{m}} S_0}} \approx \frac{1}{2.718} \sqrt[0.116]{\frac{31.76 + 38.90}{2 \times 38.90}} \approx 0.1605.$$

puis en construisant itérativement la suite $\{x_j\}_{j=0}^{j=\infty}$ en appliquant la règle $x_{j+1} = \alpha x_j^n$ à partir de $x_0 = \alpha$. Dans ce contexte, la solution de l'équation de la déformation maximale (1) est

$$\bar{\varepsilon} = n\bar{x}$$

où $\bar{x}$ est la limite de la suite $\{x_j\}_{j=0}^{j=\infty}$. Les premiers termes de la suite $\{x_j\}_{j=0}^{j=\infty}$ sont

j	x_j
0	0.16053
1	0.12983
2	0.12668
3	0.12632
4	0.12627
5	0.12627

Table 3: Itération de l'algorithme de la déformation maximale

De sorte que

$$\bar{x} \approx 0.1262 \quad \text{et que} \quad \bar{\varepsilon} = n\bar{x} \approx 0.116 * 0.1262 \approx 0.01464.$$

3) Calculez $\bar{\ell}$, la longueur de la barre au moment où s'applique la force $\bar{F}$.

Solution

On déduit la longueur $\bar{\ell}$ de la barre en inversant la définition de $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \ln \frac{\bar{\ell}}{l_0} \Longrightarrow \bar{\ell} = l_0 \mathbf{e}^{\bar{\varepsilon}} \approx 1000.0 * \mathbf{e}^{\bar{\varepsilon}} \approx 1014.75\,\mathrm{mm}.$$

4) Calculez $\bar{\sigma}$ et $\bar{R}$ les contraintes réelle et nominale au moment où s'applique la force $\bar{F}$.

Solution

La contrainte nominale est

$$\bar{R} = \frac{\bar{F}}{S_0} = \frac{F_\mathrm{e} + F_\mathrm{m}}{2S_0} = \frac{F_\mathrm{e}}{2S_0} + \frac{F_\mathrm{m}}{2S_0} = \frac{R_\mathrm{e}}{2} + \frac{R_\mathrm{m}}{2} \approx \frac{31.89}{2} + \frac{38.90}{2} = 35.33\,\mathrm{MPa}$$

La contrainte réelle se calcule en appliquant la loi de Ludwik puisque $\bar{\varepsilon} > \varepsilon_\mathrm{e}$:

$$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n \approx 55.86 \times 0.01464^{0.116} \approx 34.22\,\mathrm{MPa}$$

i) Une des deux figures 1 ou 2 est utile pour représenter le taux de déformation permanent ultime $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$. En rouge, faites la construction qui permet d'identifier cette grandeur.

j) On vous indique que le taux de déformation à la rupture du matériau $\mathcal{M}$ vaut $\varepsilon_\mathrm{ult} = 0.3$. Dans ces conditions, calculez très précisément la plus grande longueur $\ell_{\mathrm{p;ult}}$ que vous pouvez donner à votre barre en effectuant une seule traction et sans courir le risque de la détruire.

Solution

Le taux de déformation permanent ultime $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$ se déduit du taux de déformation à la rupture par la formule

$$\varepsilon_{\mathrm{p;ult}} = \varepsilon_\mathrm{ult} - \varepsilon_\mathrm{e}^{1-n}\varepsilon_\mathrm{ult}^n \approx 0.3 - 0.0079^{1-0.116}0.3^{0.116} \approx 0.287.$$

On déduit alors la longueur $\ell_{\mathrm{p;ult}}$ en inversant la définition de $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$

$$\varepsilon_{\mathrm{p;ult}} = \ln\frac{\ell_{\mathrm{p;ult}}}{l_0} \Longrightarrow \ell_{\mathrm{p;ult}} = l_0\mathbf{e}^{\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}} \approx 1000.0 * \mathbf{e}^{0.287} \approx 1333.57\,\mathrm{mm}.$$

Correction

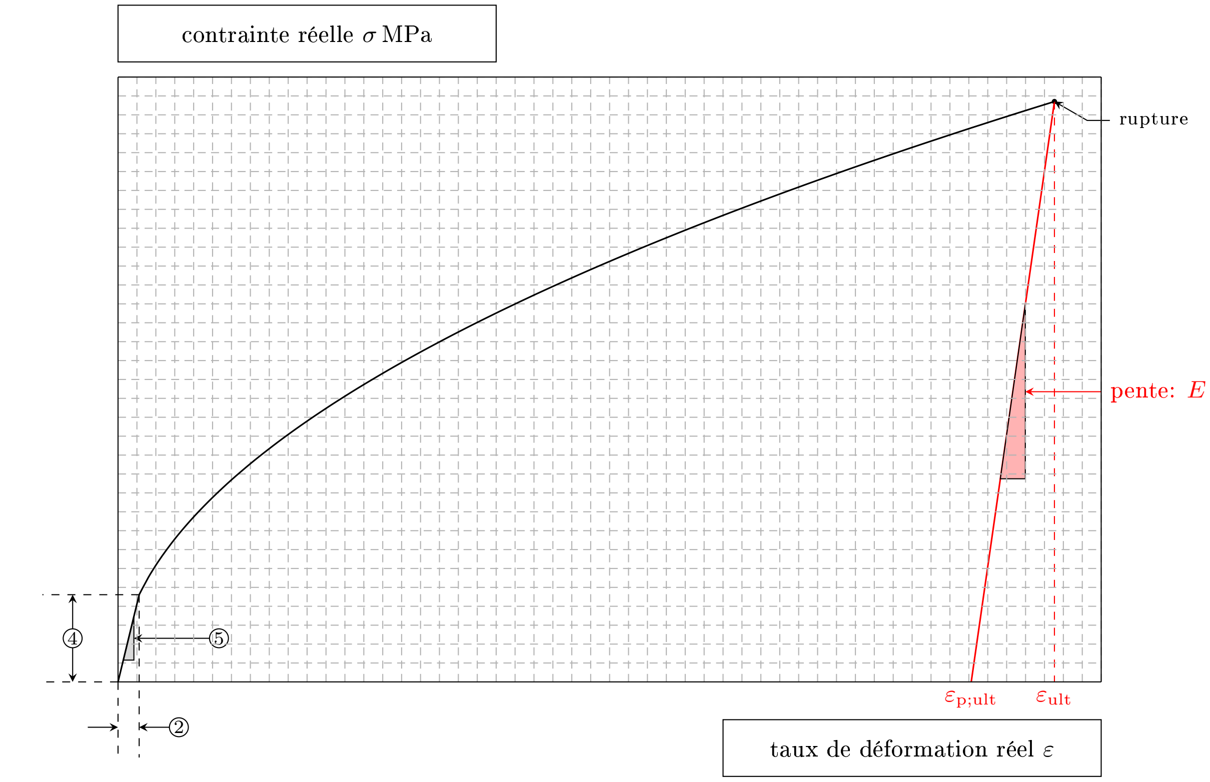

Figure 1: Courbe de traction réelle

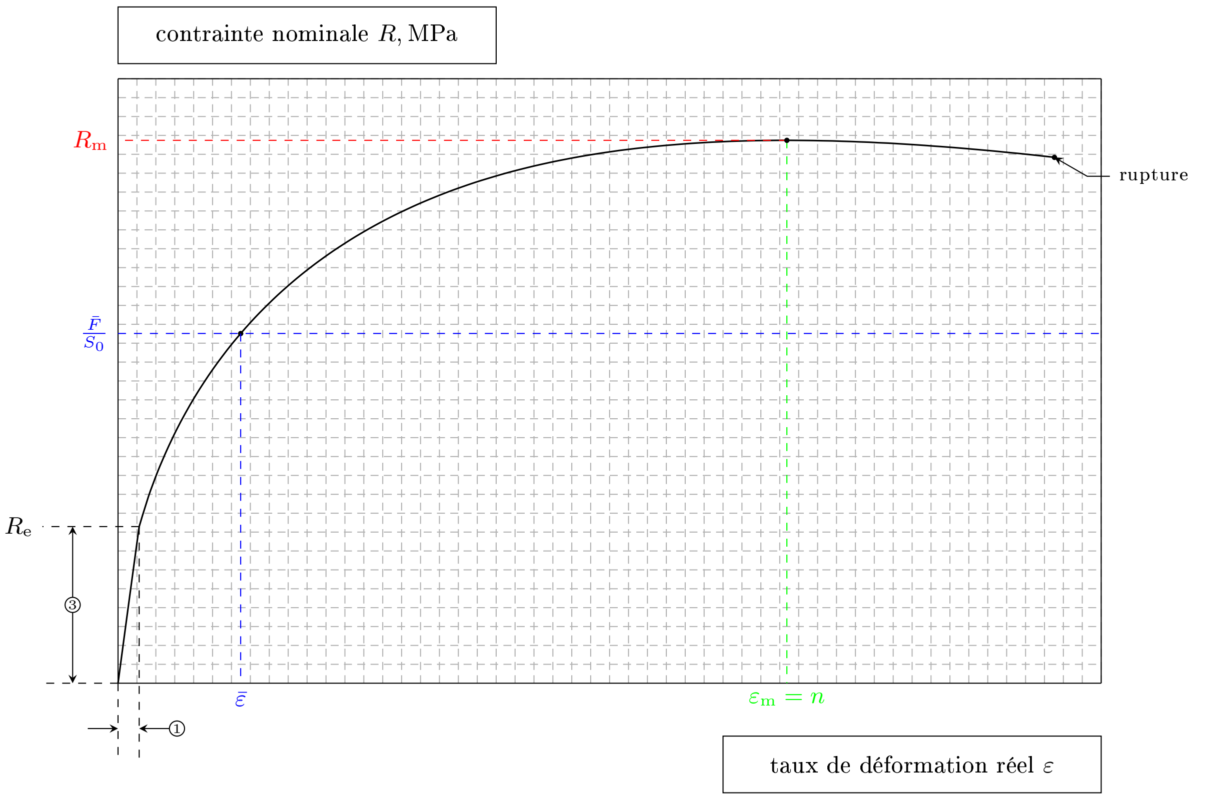

Figure 2: Courbe de traction (nominale)