Corrigé du travail écrit.

Problème 1

a) Le module d'élasticité et les coefficients d'écrouissage et de Poisson ne dépendent que de la nature chimique de l'échantillon et pas de son historique thermo-mécanique En conséquence les réponses à donner à Armand sont

- Module d'élasticité :
$$\boxed{E = 70\,\mathrm{GPa},} \tag{1}$$
- coefficient d'écrouissage :
$$\boxed{n = 0.3,} \tag{2}$$
- coefficient de Poisson :
$$\boxed{\nu = 0.45.} \tag{3}$$

b) La limite élastique réelle σ_e se déduit de la loi de Hooke et la limite élastique (nominale) R_e de la fonction de traction. Ensuite, le module d'écrouissage est lié au module d'élasticité et au taux de déformation réelle en limite élastique par une formule connue. On trouve

- Limite élastique réelle :
$$\boxed{\sigma_\mathrm{e} = E\varepsilon_\mathrm{e} \simeq 70'000 \times 0.005 \simeq 350\,\mathrm{MPa}} \tag{4}$$
- Limite élastique (nominale) :
$$\boxed{R_\mathrm{e} = E\varepsilon_\mathrm{e}\mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon_\mathrm{e}} \simeq 70'000 \times 0.005 \times \mathbf{e}^{-2\times0.45\times0.005} \simeq 348.42\,\mathrm{MPa}} \tag{5}$$
- Module d'écrouissage :
$$\boxed{K = E\varepsilon_\mathrm{e}^{1-n} \simeq 70'000 \times 0.005^{1-0.3} \simeq 1'715.} \tag{6}$$

c) L'hypothèse qui permet d'estimer rapidement les valeurs de R_m et ε_m est celle de **Considère** dont le prénom, Armand, est le même que celui de votre assistant. Cette hypothèse permet d'affirmer que

$$\boxed{R_\mathrm{m} = K\left(\tfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_\mathrm{e}} \simeq 1'715 \times \left(\tfrac{0.3}{\mathbf{e}}\right)^{0.3} \mathbf{e}^{(1-2\times0.45)\times0.005} \simeq 886\,\mathrm{MPa}} \tag{7}$$

et que
$$\boxed{\varepsilon_\mathrm{m} = n = 0.3.} \tag{8}$$

d) Il existe un lien entre les limites élastiques ε_e' et ε_e de l'échantillon écroui et de l'échantillon recuit. Ce lien fait intervenir le taux de déformation ε_r auquel le fournisseur a relâché l'écrouissage :

$$\varepsilon_\mathrm{e}' = \varepsilon_\mathrm{e}\left(\frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{e}}\right)^n.$$

Si on résoud pour ε_r on trouve que

$$\varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon_\mathrm{e}\left(\frac{\varepsilon'_\mathrm{e}}{\varepsilon_\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

soit

$$\boxed{\varepsilon_\mathrm{r} \simeq 0.005 \times \left(\tfrac{0.0075}{0.005}\right)^{\frac{1}{0.3}} \simeq 0.01931.} \tag{9}$$

On trouve ensuite ε_p en retranchant le rebond élastique ε'_e au taux en relaxation :

$$\boxed{\varepsilon_\mathrm{p} = \varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon'_\mathrm{e} \simeq 0.01931 - 0.0075 \simeq 0.01181.} \tag{10}$$

La longueur initiale de l'échantillon vaut

$$\boxed{l_0 = l_\mathrm{p}\mathbf{e}^{-\varepsilon_\mathrm{p}} \simeq 500 \times \mathbf{e}^{-0.01181} \simeq 494.13\,\mathrm{mm}.} \tag{11}$$

La section initiale doit assurer le maintien du volume, on a donc que

$$S_0 = \frac{S_\mathrm{p} l_\mathrm{p}}{l_0}$$

soit

$$S_0 = \frac{\pi r_\mathrm{p}^2 l_\mathrm{p}}{l_0} \simeq \frac{3.14 \times 20^2 \times 500}{494.13} \simeq 1'271.57\,\mathrm{mm}^2 \tag{12}$$

Le rayon initial r_0 est lié à la section initiale : $S_0 = \pi r_0^2$. Si on résoud pour r_0, cela implique que :

$$\boxed{r_0 = \sqrt{\tfrac{S_0}{\pi}} \simeq \sqrt{\tfrac{1'271.57}{3.14}} \simeq 20.12\,\mathrm{mm}.} \tag{13}$$

e) Le taux de déformation ultime ε_ult du matériau recuit s'obtient en appliquant la loi de transfert au taux de déformation ultime $\varepsilon'_\mathrm{ult}$ du matériau écroui :

$$\boxed{\varepsilon_\mathrm{ult} = \varepsilon'_\mathrm{ult} + \varepsilon_\mathrm{p} \simeq 0.39 + 0.01181 \simeq 0.401.} \tag{14}$$

f) Il faut d'abord calculer l'énergie spécifique de déformation η jusqu'au taux en relaxation ε_r. Si on tient compte que que cette quantité est l'aire sous la courbe de traction réel :

$$\eta = \int_0^{\varepsilon_\mathrm{r}} \sigma\,\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_\mathrm{e}} E\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon + \int_{\varepsilon_\mathrm{e}}^{\varepsilon_\mathrm{r}} K\varepsilon^n\,\mathrm{d}\varepsilon$$

soit, en réduisant les primitives :

$$\eta = \frac{1}{2}E\varepsilon_\mathrm{e}^2 + \frac{1}{1+n}K(\varepsilon_\mathrm{r}^{1+n} - \varepsilon_\mathrm{e}^{1+n}).$$

Puisque les GPa correspondent à des $\mathrm{J/mm^3}$, l'application numérique donne :

$$\eta = \frac{70}{2}0.005^2 + \frac{1.715}{1+0.3}(0.01931^{1+0.3} - 0.005^{1+0.3}) \simeq 0.00645\,\mathrm{J/mm^3} \tag{15}$$

On obtient ensuite une sous-estimation de l'énergie nécessaire en multipliant l'énergie spécifique de déformation par le volume **initial** de la matière à travailler ($N = 1'250$ barres). Chaque barre a un volume initial valant

$$V_0 = S_0 l_0 = 1'271.57 \times 494.13 \simeq 628'320\,\mathrm{mm}^3 \tag{16}$$

On trouve ainsi que

$$\boxed{W_{\mathrm{inf}} = NV_0\eta \simeq 1'250 \times 628'320 \times 0.00645 \simeq 5'066'144\,\mathrm{J} \simeq 1.382\,\mathrm{kWh}.} \tag{17}$$

On obtient une sur-estimation de l'énergie en multipliant l'énergie spécifique de déformation par le volume **final** de la matière à travailler. Ce volume est NV_{r} où V_{r} est le volume de la barre en relaxation. Ce volume se déduit du volume initial en utilisant directement la loi de Considère :

$$V_{\mathrm{r}} = V_0 \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}}$$

ou alors en tenant compte que le volume permanent est égal au volumue initial (loi de Hencky) et du fait que la transition entre l'état permanent et la relaxation est une transformation élastique de taux $\varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{p}} = \varepsilon'_{\mathrm{e}}$ durant laquelle la loi de Poisson s'applique. Dans ce cas on a que

$$V_{\mathrm{r}} = V_0 \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon'_{\mathrm{e}}}.$$

On obtient que

$$V_{\mathrm{r}} \simeq 628'320 \times \mathbf{e}^{(1-2\times 0.45)\times 0.005} \simeq 628'635\,\mathrm{mm}^3 \quad \textbf{(Considère)} \tag{18}$$

ou que

$$V_{\mathrm{r}} \simeq 628'320 \times \mathbf{e}^{(1-2\times 0.45)\times 0.0075} \simeq 628'760\,\mathrm{mm}^3 \quad \textbf{(Hencky)} \tag{19}$$

ce qui revient presque au même a un dixième de pour mille près. La conclusion est maintenant que

$$\boxed{W_{\mathrm{sup}} = NV_r\eta \simeq 1'250 \times 628'760 \times 0.00645 \simeq 5'069'377\,\mathrm{J} \simeq 1.382\,\mathrm{kWh}.} \tag{20}$$

On constate que cette sur-estimation est **quasiment égale** à la sous-estimation (17), cela est dû à la faible compressibilité du matériau. La conclusion générale est que l'énergie de déformation à dépenser est **insignifiante**.

g) La force développée en sortie de zone élastique est

$$\boxed{F_{\mathrm{e}} = R_{\mathrm{e}} S_0 \simeq 348.42 \times 1'271.57 \simeq 443'040\,\mathrm{N} \simeq 443\,\mathrm{kN}.} \tag{21}$$

La force développée en relaxation se déduit de la contrainte nominale R_{r} :

$$F_{\mathrm{r}} = R_{\mathrm{r}} S_0.$$

La contrainte nominale R_{r} est donnée par la fonction de traction :

$$R_{\mathrm{r}} = R_{\mathrm{m}} \left(\xi_{\mathrm{r}} \mathbf{e}^{1-\xi_{\mathrm{r}}}\right)^n \quad \text{où} \quad \xi_{\mathrm{r}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{n}.$$

On calcule d'abord ξ_{r} :

$$\xi_{\mathrm{r}} \simeq \frac{0.01931}{0.3} \simeq 0.0644$$

puis on conclut :

$$F_{\mathrm{r}} = R_{\mathrm{m}} \left(\xi_{\mathrm{r}} \mathbf{e}^{1-\xi_{\mathrm{r}}}\right)^{n} S_0 \simeq 886 \times \left(0.0644 \times \mathbf{e}^{1-0.0644}\right)^{0.3} \times 1'271.57 \simeq 650'052\,\mathrm{N} \simeq 655\,\mathrm{kN}. \tag{22}$$

Puisque la relaxation a lieu avant le passage par le point de résistance, la force maximale développée par la machine se mesure en fin d'opération, on a donc que

$$F_{\mathrm{max}} = F_{\mathrm{r}} \simeq 655\,\mathrm{kN}. \tag{23}$$

Puisque le taux de déformation en rupture $\varepsilon_{\mathrm{ult}}$ (14) est supérieur taux de déformation en écrouissage maximum ε_{m} (8), la force maximale à développer pour rompre la pièce est réalisée au point de résistace. On a donc

$$F_{\mathrm{rup}} = R_{\mathrm{m}} S_0 \simeq 886 \times 1'271.57 \simeq 1'126'611\,\mathrm{N} \simeq 1'126.6\,\mathrm{kN} \tag{24}$$