E.Boillat

Corrigé de la série 5.

Exercice 1

a) **Cas où le rapport de réduction r est fixé à $r = 0.75$.**

1) Une formule du cours permet de calculer la longueur de contact à partir des diamètres d'entrée D_0 et de sortie D_f :

$$L = \frac{D_0 - D_f}{2\sin\alpha}.$$

Si le rapport de réduction d'aire vaut r, le rapport de réduction des diamètres est $\sqrt{r}$: $D_f = \sqrt{r}D_0$ et on peut écrire que

$$L = D_0\sqrt{1+\tan^2\alpha}\frac{1-\sqrt{r}}{2\tan\alpha}$$

où on a tenu compte de l'identité trigonométrique :

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

qui permet de remplacer le sinus par la tangente (pour des angles petits). Avec les données numériques on trouve que

$$L = 50 \times \sqrt{1+0.1^2}\frac{1-\sqrt{0.75}}{2\times 0.1} \simeq 33.66\,\text{mm}.$$

2) Une autre formule du cours, applicable pour un matériau au comportement plastique idéal, permet de calculer la force de tréfilage. Cette formule est :

$$F_{\text{tref}} = rA_0R_e\left(1+\frac{1}{\mu\cot\alpha}\right)\left(1-r^{\mu\cot\alpha}\right)$$

Avec les données numériques, en tenant compte que $A_0 = \frac{1}{4}\pi D_0^2$ et que $R_e = 0.1$ en unité de kN/mm^2 :

$$F_{\text{tref}} \simeq 0.75 \times \frac{3.14\times 50^2}{4} \times 0.1 \times \left(1+\frac{1}{0.1\times 10}\right)\left(1-0.75^{0.1\times 10}\right) \simeq 73.6\,\text{kN}$$

3) La force de tréfilage correspond à une contrainte de traction q_f distribuée sur la section de sortie A_f :

$$q_f = \frac{F_{\text{tref}}}{A_f} = R_e\left(1+\frac{1}{\mu\cot\alpha}\right)\left(1-r^{\mu\cot\alpha}\right)$$

soit, avec les données numériques :

$$q_f \simeq 100 \times \left(1+\frac{1}{0.1\times 10}\right)\left(1-0.75^{0.1\times 10}\right) = 50\,\text{MPa}.$$

4) La vitesse de sortie v_f du flan, doit être adaptée à la puissance maximale que la machine peut fournir et à la force de tréfilage nécessaire :

$$v_f^{\max} = \frac{P_{\max}}{F_{\text{tref}}}$$

soit, avec les données numériques :

$$v_f^{\max} = \frac{100}{73.6} \simeq 1.36\,\text{m/s} = 1360\,\text{mm/s}.$$

Il en résulte le taux de matière tréfilée maximal :

$$\dot{V}^{\max} = A_f v_f^{\max} = r\frac{\pi D_0^2}{4} v_f^{\max}$$

soit, avec les données numériques :

$$\dot{V}^{\max} \simeq 0.75 \times \frac{3.14 \times 50^2}{4} \times 1360 = 2'001'750\,\text{mm}^3/\text{s} \simeq 2\,\text{l/s}.$$

5) L'énergie spécifique de déformation pour un matériau tréfilé au comportement plastique idéal et au taux de déformation réel en limite élastique négligeable est donnée par la formule du cours :

$$e_{\text{spec}} = -R_e \ln r \quad \text{où} \quad r = \frac{A_f}{A_0}.$$

Avec les données numériques, en tenant compte que $R_e = 0.1$ en unité de J/mm^3, on trouve que :

$$e_{\text{spec}} = 0.1 \times \ln \frac{1}{0.75} \simeq 0.029\,\text{J/mm}^3.$$

D'un autre côté, l'énergie totale que coûte le tréfilage d'une unité de volume de matière est exactement égale à la tension de tréfilage q_f. En effet :

$$P_{\text{tref}} = F_{\text{tref}} v_f = q_f A_f v_f = q_f \dot{V}.$$

En conclusion, les proportions de puissance dissipées en déformation plastique et en frottement sont respectivement :

$$\eta_{\text{plast}} = \frac{e_{\text{spec}}}{q_f} \quad \text{et} \quad \eta_{\text{frott}} = \frac{q_f - e_{\text{spec}}}{q_f}.$$

Avec les données numériques et en tenant compte que $q_f = 0.05$ en unité de J/mm^3, on trouve que

$$\eta_{\text{plast}} \simeq \frac{0.029}{0.05} \simeq 58\% \quad \text{et} \quad \eta_{\text{frott}} = 1 - 0.58 \simeq 42\%.$$

b) **Cas où la force de la machine est imposée**

1) Pour une valeur de r indéterminé, la force de tréfilage F_{tref} vaut :

$$F_{\text{tref}} = r\frac{\pi D_0^2}{4} R_e \left(1 + \frac{1}{\mu \cot \alpha}\right)\left(1 - r^{\mu \cot \alpha}\right),$$

soit avec les valeurs numériques et en tenant compte que $R_e = 0.1$ en unité de $\mathrm{kN/mm^2}$:

$$F_{\text{tref}} \simeq r\frac{3.14 \times 50^2}{4} \times 0.1 \times \left(1 + \frac{1}{0.1 \times 10}\right)\left(1 - r^{0.1\times 10}\right) \simeq 392.5r(1-r)\,\mathrm{kN}.$$

La contrainte que $F_{\text{tref}} = 50\,\mathrm{kN}$ implique que le rapport de réduction r soit choisi de telle sorte que

$$r(1-r) = \eta \tag{1}$$

avec

$$\eta = \frac{50}{392.5} \simeq 0.1274$$

Le polynôme de degré 2 : $p(r) = r(1-r)$ s'anulle en $r = 0$ et en $r = 1$ et atteint son maximum $p_{max} = 0.25$ en $r = 0.5$. L'équation quadratique (1) admet donc deux solutions dans l'intervalle $(0, 1)$ pour tout $\eta \in (0, 0.25)$. Ces deux solutions sont disposées symétriquement par rapport à $r = 0.5$. On a la formule :

$$r_\pm = 0.5 \pm \frac{\sqrt{1-4\eta}}{2}.$$

Dans notre cas, la valeur numérique $\eta = 0.1274$ est bien comprise entre 0 et 0.25 et les deux solutions r_-, r_+ existent. Elles valent :

$$r_- = 0.5 - \frac{\sqrt{1 - 4 \times 0.1274}}{2} \simeq 0.15,$$

et

$$r_+ = 0.5 + \frac{\sqrt{1 - 4 \times 0.1274}}{2} \simeq 0.85$$

2) La condition de tréfilage vue au cours impose une limite inférieure sur les facteurs de réduction qu'on peut atteindre. Cette limite est

$$r_{\text{lim}} = \sqrt[\mu\cot\alpha]{\frac{1}{1 + \mu\cot\alpha}}$$

soit, puisque $\mu \cot\alpha = 0.1 \times 10 = 1$

$$r_{\text{lim}} = \frac{1}{1+1} = 0.5.$$

La conclusion est que le rapport de réduction $r_- \simeq 0.15$ ne peut pas être atteint. Le problème qu'on rencontrera en essayant de réduire la section du flan d'un aussi grand rapport est **une perte de contact entre la filière et le flan** et, probablement aussi, une rupture de la matière.

3) Le diamètre de sortie D_f correspondant au rapport de réduction des sections r_+ est

$$D_f = \sqrt{r_+}D_0$$

soit, avec les valeurs numériques,

$$D_f \simeq \sqrt{0.85} \times 50 \simeq 46.10\,\mathrm{mm}.$$

Pour finir, la nouvelle longueur de contact vaudra :

$$L = \frac{D_0 - D_f}{2\tan\alpha}\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

soit

$$L \simeq \frac{50-46.10}{2\times 0.1}\sqrt{1+0.1^2} \simeq 19.61\,\text{mm}.$$

4) La vitesse de sortie v_f du flan est adaptée à la force de tréfilage et à la puissance de la machine. Elle vaut :

$$v_f^{\max} = \frac{P_{\max}}{F_{\text{tref}}}$$

soit, avec les données numériques :

$$v_f^{\max} = \frac{100}{50} = 2.0\,\text{m/s} = 2000\,\text{mm/s}.$$

La vitesse d'entrée du flan doit assurer la conservation de la matière. Comme il est impossible de modifier **plastiquement** la densité de la matière, on conserve aussi les volumes entre l'éntrée et la sortie de la filière :

$$v_0 A_0 = v_f A_f \Longrightarrow v_0 = v_f\frac{A_f}{A_0} = r_+ v_f$$

soit, avec les valeurs numériques,

$$v_0 \simeq 0.85\times 2000 \simeq 1700\,\text{mm/s}.$$

Exercice 2

(a) La force de laminage correspondant à un rétrecessissement $\delta = t_0 - t_r$ vaut

$$F_{\text{lam}} \simeq wR_e\sqrt{R(t_0-t_f)}$$

avec R le rayon des rouleaux, w la largeur (supposé constante) de la pièce et R_e la limite élastique du matériau. Dans notre cas et en exprimant R_e en kN/mm^2 :

$$R_e = 0.15\,\text{kN/mm}^2$$

on trouve :

$$F_{\text{lam}} \simeq 1000\times 0.15\times\sqrt{400\times(100-10)} \simeq 28'460.5\,\text{kN}$$

ce qui excède la limite de $25'000$ kN tolérée.

(b) Il n'existe pas de façon de planifier les deux passes de façon à diminuer le travail de laminage. Comme le matériau est quasi incompressible, le travail de laminage pour un volume V_0 sera toujours égal à

$$A = R_e V_0 \ln\frac{t_0}{t_f}, \tag{1}$$

quelque soit l'épaisseur t_i de la matière obtenue après le premier laminage.
Pour s'en convaincre, on propose le raisonnement suivant :

- Le travail lors du premier laminage (amenant de l'épaisseur t_0 à l'épaisseur t_i) sera

$$A^{(1)} = R_e V_0 \ln \frac{t_0}{t_i}.$$

- Le travail lors du second (amenant de l'épaisseur t_i à l'épaisseur t_f) sera

$$A^{(2)} = R_e V_0 \ln \frac{t_i}{t_f}.$$

- Au total, le travail vaut

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} = R_e V_0 \left(\ln \frac{t_0}{t_i} + \ln \frac{t_i}{t_f} \right)$$

  et on retrouve (1) grâce à la propriété d'additivité du logarithme.

Dans ces conditions, on choisit l'épaisseur intermédiaire t_i de telle sorte que les travaux spécifiques

$$e^{(1)}_{\text{spec}} = R_e \ln \frac{t_0}{t_i}$$

et

$$e^{(2)}_{\text{spec}} = R_e \ln \frac{t_i}{t_f}$$

soient les mêmes

$$e^{(1)}_{\text{spec}} = e^{(2)}_{\text{spec}}. \tag{2}$$

Cela donne l'équation

$$\ln \frac{t_0}{t_i} = \ln \frac{t_i}{t_f}$$

soit, puisque le logarithme est une fonction injective :

$$\frac{t_0}{t_i} = \frac{t_i}{t_f} \Longleftrightarrow t_i^2 = t_0 t_f$$

et on conclut que

$$t_i = \sqrt{t_0 t_f} = \sqrt{10 \times 100} \simeq 31.63\,\text{mm}.$$

(c) Le rétrecissement maximal a lieu lors de la première passe. C'est donc celle-ci qui nécessite la force de laminage maximale et la plus grande friction.

- La force de laminage nécessaire sera

$$F^{(1)}_{\text{lam}} = w R_e \sqrt{R(t_0 - t_i)} = 1000 \times 0.15 \times \sqrt{400 \times (100 - 31.63)} \simeq 24'807.2\,\text{kN}$$

  et est inférieure à la limite de la machine ($25'000\,\text{kN}$).
- La limite pour le coefficient de friction vient de la formule du cours $\mu^2 R \geq \frac{4}{9}\delta$, soit :

$$\mu_{min} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{t_0 - t_i}{R}} \simeq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{100 - 31.63}{400}} \simeq 0.276.$$

(d) Exprimant R_e en J/mm^3 :

$$R_e = 0.15\,\mathrm{J/mm^3}$$

on peut estimer, les moments de laminage $M_{\mathrm{lam}}^{(1)}$ et $M_{\mathrm{lam}}^{(2)}$ lors des deux passes. Ils valent

$$M_{\mathrm{lam}}^{(1)} = \frac{1}{2} w R_e R(t_0 - t_i) = 0.5 \times 1000 \times 0.15 \times 400 \times (100 - 31.63) \simeq 2.051 \times 10^6\,\mathrm{N\cdot\ m}.$$

et

$$M_{\mathrm{lam}}^{(2)} = \frac{1}{2} w R_e R(t_i - t_f) = 0.5 \times 1000 \times 0.15 \times 400 \times (31.63 - 10) \simeq 0.6489 \times 10^6\,\mathrm{N\cdot\ m}.$$

Pour assurer l'utilisation d'une puissance de $P_{\max} = 1\,\mathrm{MW}$, on doit donc ajuster les vitesses de rotation des rouleaux à

$$\omega^{(1)} = \frac{P_{\max}}{2M_{\mathrm{lam}}^{(1)}} = \frac{10^6}{2 \times 2.051 \times 10^6} \simeq 0.24375\,\mathrm{rad/s}.$$

et

$$\omega^{(2)} = \frac{P_{\max}}{2M_{\mathrm{lam}}^{(2)}} = \frac{10^6}{2 \times 0.6489 \times 10^6} \simeq 0.7705\,\mathrm{rad/s}.$$

(e) La conception des deux passes basée sur l'équilibre des travaux spécifiques implique un même facteur de laminage dans l'une et l'autre. En effet, le travail spécifique est fonction du facteur de laminage seulement. Ce facteur de laminage commun vaut :

$$r = 1 - \frac{t_i}{t_0} = 1 - \frac{t_f}{t_i} = 1 - \frac{31.63}{100} = 1 - \frac{10}{31.63} \simeq 0.6837.$$

- On obtient les vitesses d'entrée dans chaque passe en appliquant la formule vue au cours :

$$v_0^{(1)} = -\frac{r}{\ln(1-r)}\omega^{(1)} R = -\frac{0.6837}{\ln(0.3163)} \times 0.24375 \times 400 \simeq 57.9\,\mathrm{mm/s}$$

et

$$v_0^{(2)} = -\frac{r}{\ln(1-r)}\omega^{(2)} R = -\frac{0.6837}{\ln(0.3163)} \times 0.7705 \times 400 \simeq 183.06\,\mathrm{mm/s}.$$

- De la même manière, on obtient les vitesses de sortie dans chaque passe :

$$v_f^{(1)} = -\frac{r}{(1-r)\ln(1-r)}\omega^{(1)} R = -\frac{0.6837}{0.3163 \times \ln(0.3163)} \times 0.24375 \times 400 \simeq 183.06\,\mathrm{mm/s}$$

et

$$v_f^{(2)} = -\frac{r}{(1-r)\ln(1-r)}\omega^{(2)} R = -\frac{0.6837}{0.3163 \times \ln(0.3163)} \times 0.7705 \times 400 \simeq 579.0\,\mathrm{mm/s}.$$

(f) Puisqu'on a dimensionné chaque passe de façon à équilibrer les travaux spécifiques (2) et que la puissance utilisée est à chaque fois la même. le taux de matière laminée doit aussi être le même dans chaque passe. Puisque la section de sortie de la première passe, $t_i \times w$, est identique à la section d'entrée de la seconde, la vitesse de sortie de la première passe doit être la même que la vitesse d'entrée dans la seconde.