Procédés de fabrication I - IGI 22 novembre 2024
E.Boillat

Corrigé de la série 4.

Exercice 1

Dans ce qui suit d_0 et l_0 représentent le diamètre et la longueur initiale de la barre à étirer tandis que d_p et l_p représentent le diamètre et la longueur de la barre étirée. On veut que

$$\frac{d_0}{d} = 10$$

Comme la déformation permanente est isochore (Hencky) on a que

$$\frac{\pi}{4}d_0^2 l_0 = \frac{\pi}{4}d_\mathrm{p}^2 l_\mathrm{p}$$

donc

$$\frac{l_\mathrm{p}}{l_0} = \left(\frac{d_0}{d_\mathrm{p}}\right)^2$$

et on tire que

$$\frac{l_\mathrm{p}}{l_0} = 100.$$

On déduit le taux de déformation réel permanent :

$$\boxed{\varepsilon_\mathrm{p} = \ln\tfrac{l_\mathrm{p}}{l_0} = \ln 100 = 4.605.}$$

L'équation de la **déformation permanente** s'écrit

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n = \frac{\varepsilon_\mathrm{p}}{\varepsilon_e} \tag{1}$$

soit, si on la multiplie par ε_e :

$$\varepsilon_r - \varepsilon_e\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n = \varepsilon_\mathrm{p} \tag{2}$$

et permet de déterminer le taux de déformation nominal ε_r à atteindre avant de relacher la barre. Comme le coefficient d'écrouissage $n = 0.5$, (2) s'écrit

$$\varepsilon_r - \sqrt{\varepsilon_e}\sqrt{\varepsilon_r} - \varepsilon_\mathrm{p} = 0.$$

C'est un équation quadratique pour

$$x = \sqrt{\varepsilon_r}. \tag{3}$$

Elle s'écrit

$$x^2 - \sqrt{\varepsilon_e}x - \varepsilon_\mathrm{p} = 0.$$

En appliquant les formules de Viète, on troubve que

$$x = \frac{\sqrt{\varepsilon_e} \pm \sqrt{\varepsilon_e + 4\varepsilon_\mathrm{p}}}{2}.$$

La solution avec le signe moins devant la racine donne $x < 0$ ce qui n'est pas compatible avec la définition (3) de x. On conclut que

$$= \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{\sqrt{\varepsilon_e} + \sqrt{\varepsilon_e + 4\varepsilon_{\mathrm{p}}}}{2}$$

et en élevant cette équation au carré on trouve

$$\varepsilon_r = \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_e} + \sqrt{\varepsilon_e + 4\varepsilon_{\mathrm{p}}}}{2} \right]^2 . \tag{4}$$

En remplaçant par les valeurs numériques : $\varepsilon_e = \frac{R_e}{E} = 0.00225$ et $\varepsilon_{\mathrm{p}} = 4.605$, il vient :

$$\boxed{\varepsilon_r = 4.708.} \tag{5}$$

Remarque.
Il est aussi possible de résoudre l'équation de la déformation permanente (1) graphiquement. Pour voir comment procéder on peut jeter un coup d'oeil aux transparents.

L'énergie spécifique de déformation est donnée par

$$\eta = \int_0^{\varepsilon_e} E\varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_r} K\varepsilon^n d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon_e^2 + \frac{K}{n+1}\left(\varepsilon_r^{n+1} - \varepsilon_e^{n+1}\right).$$

où

$$K = E\varepsilon_e^{1-n}.$$

Or

quantité	valeur	unité
ε_e	0.00225	-
ε_r	4.708	-
E	200	GPa
n	0.5	-
K	$200\sqrt{0.00225} \simeq 9.486$	GPa

On conclut que

$$\eta \simeq 5.06 \cdot 10^{-4} + 64.6 \simeq 64.6 \text{ GPa} = 64.6 \ \ \text{J/mm}^3.$$

La Fig. 3 illustre le fait que e volume de matière nécessaire à construire une agrafe consiste en trois portions cylindriques de diamètre $d = 1\,\text{mm}$ et de hauteurs respectives $H = 5\,\text{mm}$, $L = 8\,\text{mm}$ et $H = 5\,\text{mm}$:

$$V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l = \pi \cdot 0.5^2 \cdot (5 + 8 + 5) \simeq 14.13\,\text{mm}^3$$

et que le matériau est incompressible ($\nu = 0.5$), on conclut que

$$\boxed{\text{Energie nécessaire} \simeq 64.6 \times 14.13 \simeq 912.78\,\text{J.}}$$

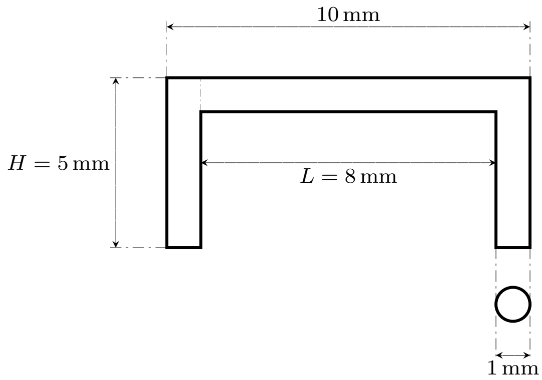

FIGURE 3 – Le volume de l'agrafe

Exercice 2

La ténacité de la barre est égale à l'énergie spécifique de déformation jusqu'en rupture :

$$T = \int_0^{\varepsilon_{rmult}} \sigma d\varepsilon.$$

La théorie de l'écrouissage vue au cours implique qu'une fois écrouie presque jusqu'en rupture, une barre casse en limite élastique :

$$\varepsilon_{rmult} = \varepsilon_{\mathrm{e}}.$$

La formule pour la ténacité se simplifie donc en

$$T = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{e}}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{e}}} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{2}\varepsilon_{\mathrm{e}}^2 = \frac{(E\varepsilon_{\mathrm{e}})^2}{2E} \tag{1}$$

car la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ est valable en zone élastique.
Si on utilise la relation approximative (cf. Rem. ci-dessous) qui dit que

$$E\varepsilon_{\mathrm{e}} \simeq R_{\mathrm{e}} \tag{2}$$

où R_{e} est la limite élastique, on peut déduire de (1) que la tenacité satisfait

$$T = \frac{R_{\mathrm{e}}^2}{2E}.$$

On a vu au cours que, pour un matériau écroui, la limite élastique R_{e} se déduit de la mesure de dureté :

$$R_{\mathrm{e}}[\mathrm{MPa}] \simeq 3.5\,\mathrm{HB}.$$

On trouve donc que

$$T = \frac{(3.5 \times 240)^2}{2 \times 200'000} \simeq 1.764\,\mathrm{MPa}.$$

Remarque : *La valeur de $R_{\mathrm{e}} = 3.5 \times 240\,MPa$ est faible en regard du module d'Young $E = 200'000\,MPa$. En particulier, le rapport $R_{\mathrm{e}}/E \simeq 0.0042$ est inférieur au pourcent, ce qui justifie la formule approximative (2).*