E.Boillat

Corrigé de la série 4.

Exercice 1

Dans ce qui suit d_0 et l_0 représentent le diamètre et la longueur initiale de la barre à étirer tandis que d_p et l_p représentent le diamètre et la longueur de la barre étirée. On veut que

$$\frac{d_0}{d} = 10$$

Comme la déformation permanente est isochore (Hencky) on a que

$$\frac{\pi}{4} d_0^2 l_0 = \frac{\pi}{4} d_\mathrm{p}^2 l_\mathrm{p}$$

donc

$$\frac{l_\mathrm{p}}{l_0} = \left(\frac{d_0}{d_\mathrm{p}}\right)^2$$

et on tire que

$$\frac{l_\mathrm{p}}{l_0} = 100.$$

On déduit le taux de déformation réel permanent :

$$\boxed{\varepsilon_\mathrm{p} = \ln \tfrac{l_\mathrm{p}}{l_0} = \ln 100 = 4.605.}$$

L'équation de la **déformation permanente** s'écrit

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n = \frac{\varepsilon_\mathrm{p}}{\varepsilon_e} \tag{1}$$

soit, si on la multiplie par ε_e :

$$\varepsilon_r - \varepsilon_e \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n = \varepsilon_\mathrm{p} \tag{2}$$

et permet de déterminer le taux de déformation nominal ε_r à atteindre avant de relacher la barre. Comme le coefficient d'écrouissage $n = 0.5$, (2) s'écrit

$$\varepsilon_r - \sqrt{\varepsilon_e}\sqrt{\varepsilon_r} - \varepsilon_\mathrm{p} = 0$$

d'où

$$\varepsilon_r = \left[\frac{\sqrt{\varepsilon_e} + \sqrt{\varepsilon_e + 4\varepsilon_\mathrm{p}}}{2}\right]^2. \tag{3}$$

Avec $\varepsilon_e = \frac{R_e}{E} = 0.00225$ et $\varepsilon_\mathrm{p} = 4.605$ on trouve que

$$\boxed{\varepsilon_r = 4.708.} \tag{4}$$

Remarque.
Il est aussi possible de résoudre l'équation de la déformation permanente (1) en appliquant l'algorithme vu au cours. Il s'agit de calculer le rapport

$$\alpha = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} \simeq \frac{4.605}{0.00225} \simeq 2046.7423$$

puis de construire la suite de nombre $\{x_m\}_{m=0}^{m=\infty}$ *en appliquant la relation de* ***récurrence*** *:*

$$x_{m+1} = \alpha + x_m^n = \alpha + x_m^{0.5} = \alpha + \sqrt{x_m} \tag{5}$$

initialisée à partir de $x_0 = \alpha$*. Le taux de déformation réel en relaxation* ε_{r} *solution de (1) se déduit alors en mutlipliant la limite* $\bar{x}$ *de la suite ainsi construite par le taux de déformation réel en limite élastique :*

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \bar{x}\varepsilon_{\mathrm{e}}. \tag{6}$$

Les six premières intérations de la récurrence (5) donnent :

m	x_m
0	2046.7423
1	2091.9832
2	2092.4805
3	2092.4859
4	2092.4860
5	2092.4860

TABLE 2 – Les six premières intérations de (5)

La conclution de (6) est donc que

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} \simeq 2092.4860 \times 0.00225 \simeq 4.708.$$

ce qui correspond évidemment au résultat (4) obtenu de façon ***transcendante****.*
Dans les faits, la valeur $n = 0.5$ *du coefficient d'écrouissage est (je crois) la seule entre* 0 *et* 1 *qui évite que l'équation de la déformation permanente (1) ne soit transcendante et qui permet donc de la résoudre en un nombre* ***fini*** *d'opérations sur la calculette (dans notre cas par applicaton de la formule (3)).*
Dans les autres cas, l'algortihme (5) est nécessaire.

L'énergie spécifique de déformation est donnée par

$$\eta = \int_0^{\varepsilon_e} E\varepsilon d\varepsilon + \int_{\varepsilon_e}^{\varepsilon_r} K\varepsilon^n d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon_e^2 + \frac{K}{n+1}\left(\varepsilon_r^{n+1} - \varepsilon_e^{n+1}\right).$$

où

$$K = E\varepsilon_e^{1-n}.$$

Or

quantité	valeur	unité
ε_e	0.00225	-
ε_r	4.708	-
E	200	GPa
n	0.5	-
K	$200\sqrt{0.00225} \simeq 9.486$	GPa

On conclut que

$$\eta \simeq 5.06 \cdot 10^{-4} + 64.6 \simeq 64.6 \text{ GPa} = 64.6 \ \text{ J/mm}^3.$$

La Fig. 3 illustre le fait que e volume de matière nécessaire à construire une agrafe consiste en trois portions cylindriques de diamètre $d = 1\,\text{mm}$ et de hauteurs respectives $H = 5\,\text{mm}$, $L = 8\,\text{mm}$ et $H = 5\,\text{mm}$:

$$V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l = \pi \cdot 0.5^2 \cdot (5 + 8 + 5) \simeq 14.13\,\text{mm}^3$$

et que le matériau est incompressible ($\nu = 0.5$), on conclut que

$$\boxed{\text{Energie nécessaire} \simeq 64.6 \times 14.13 \simeq 912.78\,\text{J.}}$$

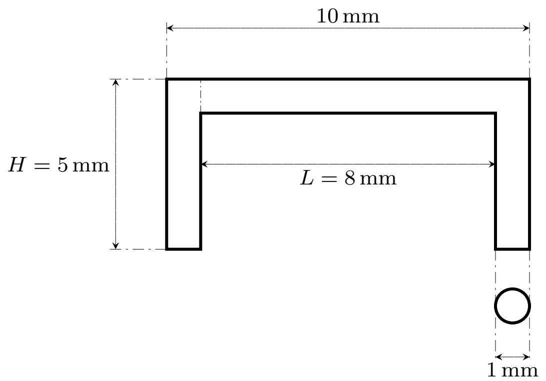

Figure 3 – Le volume de l'agrafe

Exercice 2

La ténacité de la barre est égale à l'énergie spécifique de déformation jusqu'en rupture :

$$T = \int_0^{\varepsilon_{rmult}} \sigma d\varepsilon.$$

La théorie de l'écrouissage vue au cours implique qu'une fois écrouie presque jusqu'en rupture, une barre casse en limite élastique :

$$\varepsilon_{rmult} = \varepsilon_{\mathrm{e}}.$$

La formule pour la ténacité se simplifie donc en

$$T = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{e}}} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{e}}} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{2}\varepsilon_{\mathrm{e}}^2 = \frac{(E\varepsilon_{\mathrm{e}})^2}{2E} \tag{1}$$

car la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ est valable en zone élastique.
Si on utilise la relation approximative (cf. Rem. ci-dessous) qui dit que

$$E\varepsilon_{\mathrm{e}} \simeq R_{\mathrm{e}} \tag{2}$$

où R_{e} est la limite élastique, on peut déduire de (1) que la tenacité satisfait

$$T = \frac{R_{\mathrm{e}}^2}{2E}.$$

On a vu au cours que, pour un matériau écroui, la limite élastique R_{e} se déduit de la mesure de dureté :

$$R_{\mathrm{e}}[\mathrm{MPa}] \simeq 3.5\,\mathrm{HB}.$$

On trouve donc que

$$T = \frac{(3.5 \times 240)^2}{2 \times 200'000} \simeq 1.764\,\mathrm{MPa}.$$

Remarque : *La valeur de $R_{\mathrm{e}} = 3.5 \times 240\,MPa$ est faible en regard du module d'Young $E = 200'000\,MPa$. En particulier, le rapport $R_{\mathrm{e}}/E \simeq 0.0042$ est inférieur au pourcent, ce qui justifie la formule approximative (2).*