Corrigé de la série 3.

Exercice 1

a) La charge qui amène le matériau en plastification est obtenue en multipliant la limite élastique $R_\mathrm{e} = 1176\,\mathrm{MPa}$ du matériau par la section initiale $S_0 = 350\,\mathrm{mm}^2$ de la barre soit

$$\boxed{F_\mathrm{e} = 1176 \times 350 = 411'600\,\mathrm{N} = 411.6\,\mathrm{kN}.} \tag{1}$$

b) Pour amener la barre en rupture, il faut passer le point de résistance en $\varepsilon = \varepsilon_\mathrm{m} = 0.1$. C'est à ce moment-là que la machine développe la plus grande charge F_m. On obtient cette charge en multipliant la résistance $R_\mathrm{m} = 1275\,\mathrm{MPa}$ du matériau par la section initiale de la barre soit

$$\boxed{F_\mathrm{m} = 1275 \times 350 = 446'250\,\mathrm{N} \simeq 446.3\,\mathrm{kN}.} \tag{2}$$

Les machines No 3, 4, et 5 sont donc capables d'amener l'échantillon en rupture mais pas les machines No 1 et 2.

c) La force de rupture F_ult s'obtient à nouveau en multipliant la contrainte nominale ultime $R_\mathrm{ult} = 714\,\mathrm{MPa}$ du matériau par la section initiale de la barre soit

$$\boxed{F_\mathrm{ult} = 714 \times 350 = 249'900\,\mathrm{N} \simeq 250.0\,\mathrm{kN}} \tag{3}$$

d) Le module d'Young du matériau est tel que

$$R_\mathrm{e} = E\varepsilon_\mathrm{e}\mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon_\mathrm{e}}.$$

Si on résoud cette équation pour E on obtient que

$$E = \frac{R_\mathrm{e}}{\varepsilon_\mathrm{e}}\mathbf{e}^{2\nu\varepsilon_\mathrm{e}}.$$

Les quantités connues dans cette équation sont $R_\mathrm{e} = 1176\,\mathrm{MPa}$ et $\varepsilon_\mathrm{e} = 0.02$, mais le coefficient de Poisson ν du matériau est inconnu, on ne peut donc pas aller plus loin. On peut toutefois donner une fourchette pour E en considérant les cas extrêmes.

- La plus grande valeur possible de E correspond au cas où la barre présente des diminutions latérales maximales, soit dans le cas incompressible : $\nu = 0.5$. Dans ce cas, on a que

$$E_\mathrm{max} = \frac{1176}{0.02}\mathbf{e}^{2\times 0.5\times 0.02} \simeq 59'988\,\mathrm{MPa} \simeq 60\,\mathrm{GPa}. \tag{4}$$

- A l'inverse, la plus petite valeur possible de E correspondra au cas limite où les diminutions latérales de la barre sont nulles, soit lorsque $\nu = 0$. On a donc que

$$E_\mathrm{min} = \frac{1176}{0.02}\mathbf{e}^{2\times 0.0\times 0.02} \simeq 58'800\,\mathrm{MPa} = 58.8\,\mathrm{GPa}. \tag{5}$$

La fourchette obtenue :

$$\boxed{E \in [58.8, 60.0]\,\text{GPa.}} \tag{6}$$

est donc assez serrée, en raison de la petitesse de ε_e.

e) Si le matériau suit une loi de Ludwik, le coefficient d'écrouissage n correspond exactement au taux de déformation réel en résistance ε_m :

$$\boxed{n = \varepsilon_\text{m} = 0.1.} \tag{7}$$

f) La courbe qui représente la charge F en fonction du taux de déformation réel ε est **exactement** la courbe de traction, à une modification de l'échelle verticale près :

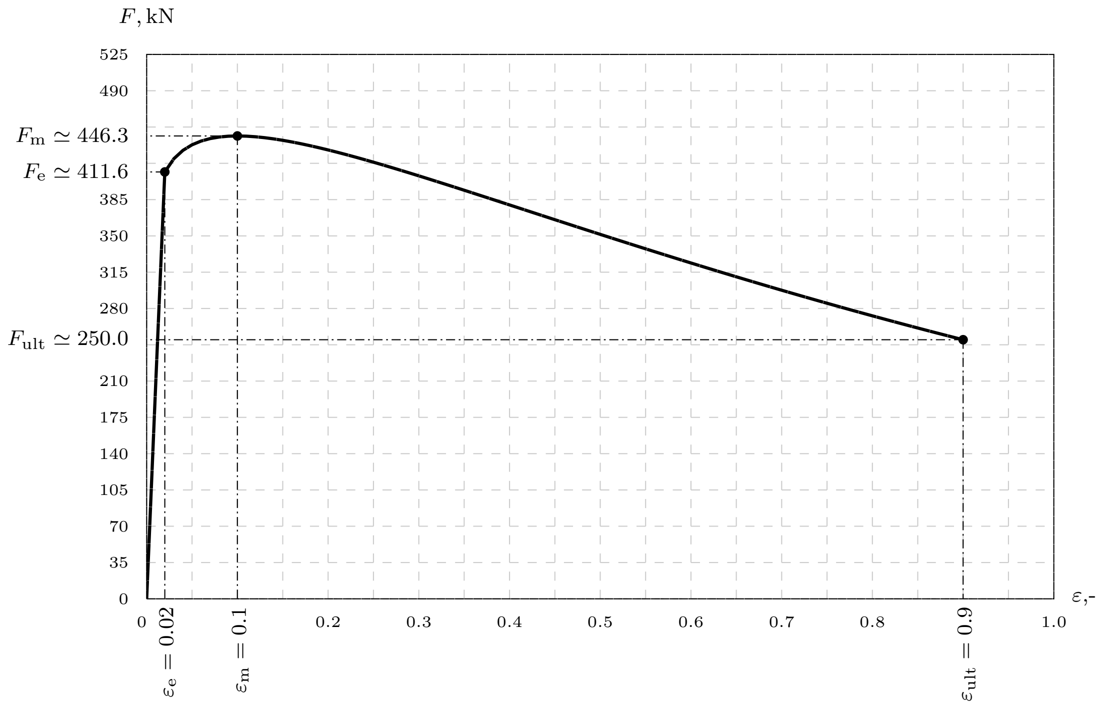

Figure 3 – Charge en fonction de la déformation

Exercice 2

a) Le taux de déformation réel en limite élastique ε_{e} du matériau est lié à la limite élastique réelle σ_{e} et au module d'Young E :

$$\sigma_{\mathrm{e}} = E\varepsilon_{\mathrm{e}}.$$

Si on résoud pour ε_{e}, on trouve que

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{e}} = \tfrac{690}{30'000} = 0.023} \tag{1}$$

b) La limite élastique réelle R_{e} est à son tour, liée au module d'Young, au coefficient de Poisson ν ainsi qu'à ε_{e} :

$$\boxed{R_{\mathrm{e}} = E\varepsilon_{\mathrm{e}}\mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon_{\mathrm{e}}} \simeq 30'000 \times 0.023\mathbf{e}^{-2\times0.42\times0.023} \simeq 676.8\,\mathrm{MPa}.} \tag{2}$$

c) La résistance R_{m} du matériau est liée à son module d'écrouissage K. Sous l'hypothèse que le matériau devient totalement incompressible lorsqu'il se plastifie (hypothèse de Considère), on a la relation

$$R_{\mathrm{m}} = K\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^{n}\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}}. \tag{3}$$

Le module d'écrouissage K est lui même fonction du module d'Young E et du taux de déformation réel en limite élastique ε_{e} :

$$K = E\varepsilon_{\mathrm{e}}^{1-n}.$$

En conséquence, on tire de (3) que

$$R_{\mathrm{m}} = E\varepsilon_{\mathrm{e}}^{1-n}\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^{n}\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}}.$$

En utilisant les données numériques ainsi que la valeur de $\varepsilon_{\mathrm{e}} = 0.023$ (1) on conclut que :

$$R_{\mathrm{m}} \simeq 30'000 \times 0.023^{1-0.2}\left(\frac{0.2}{2.71828}\right)^{0.2} \times 2.71828^{(1-2\times0.42)\times0.023} \simeq 873.87\,\mathrm{MPa}. \tag{4}$$

d) La contrainte nominale qu'il est possible d'atteindre avec une machine développant la force $F = 0.1\,\mathrm{MN}$ sur des barres de section $S_0 = 1.2\,\mathrm{cm}^2$ est :

$$\frac{F}{S_0} = \frac{100000\,\mathrm{N}}{1.2\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 833.33\times10^{6}\,\mathrm{N/m}^2 = 833.33\,\mathrm{MPa}. \tag{5}$$

Comme cette contraite est supérieure à la limite élastique $R_{\mathrm{e}} = 676.8\,\mathrm{MPa}$ du matériau (2) et inférieure à la résistance (4), le taux de déformation réel maximal $\varepsilon_{\max}$ qu'on pourra obtenir s'obtient en résolvant l'équation transcendante :

$$\frac{F}{S_0} = R_{\mathrm{m}}\left(\frac{\varepsilon_{\max}}{n}\mathbf{e}^{1-\dfrac{\varepsilon_{\max}}{n}}\right)^{n},$$

grâce à l'algorithme vu au cours.
On forme la quantité

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{e}}\sqrt[n]{\frac{1}{R_m}\frac{F}{S_0}}$$

qui, compte tenu des valeurs (4) de la résistance R_m et (5) du rapport $\frac{F}{S_0}$, vaut

$$\alpha \simeq \frac{1}{2.71828} \sqrt[0.2]{\frac{833.33}{873.87}} \simeq 0.2901117$$

puis on effectue l'itération de point fixe

$$x_{m+1} = \alpha \mathbf{e}^{x_m},\ m = 0, 1, 2\dots$$

à partir de la condition initiale $x_0 = \alpha$ jusqu'à convergence approximative vers une valeur $\bar{x}$. Les quatorze premières itérations donnent les résultats suivants :

m	x_m	nx_m
0	0.2901117	0.05802234
1	0.38775656	0.07755131
2	0.4275292	0.085505836
3	0.4448758	0.08897516
4	0.45266023	0.09053205
5	0.45619768	0.091239534
6	0.4578143	0.09156286
7	0.45855504	0.09171101
8	0.45889482	0.091778964
9	0.45905077	0.09181016
10	0.45912236	0.09182447
11	0.45915523	0.09183105
12	0.4591703	0.09183406
13	0.45917726	0.091835454
14	0.4591804	0.09183609

Table 2 – Quatorze itérations de point fixe.

La conclusion que l'on tire est que

$$\boxed{\varepsilon_{\max} \simeq n\bar{x} \simeq 0.09183609} \tag{6}$$