

Corrigé de la série 3.

Exercice 1

- a) La charge qui amène le matériau en plastification est obtenue en multipliant la limite élastique $R_e = 1176$ MPa du matériau par la section initiale $S_0 = 350$ mm² de la barre soit

$$F_e = 1176 \times 350 = 411'600 \text{ N} = 411.6 \text{ kN}. \quad (1)$$

- b) Pour amener la barre en rupture, il faut passer le point de résistance en $\varepsilon = \varepsilon_m = 0.1$. C'est à ce moment-là que la machine développe la plus grande charge F_m . On obtient cette charge en multipliant la résistance $R_m = 1275$ MPa du matériau par la section initiale de la barre soit

$$F_m = 1275 \times 350 = 446'250 \text{ N} \simeq 446.3 \text{ kN}. \quad (2)$$

Les machines No 3, 4, et 5 sont donc capables d'amener l'échantillon en rupture mais pas les machines No 1 et 2.

- c) La force de rupture F_{ult} s'obtient à nouveau en multipliant la contrainte nominale ultime $R_{\text{ult}} = 714$ MPa du matériau par la section initiale de la barre soit

$$F_{\text{ult}} = 714 \times 350 = 249'900 \text{ N} \simeq 250.0 \text{ kN} \quad (3)$$

- d) Le module d'Young du matériau est tel que

$$R_e = E \varepsilon_e e^{-2\nu \varepsilon_e}.$$

Si on résoud cette équation pour E on obtient que

$$E = \frac{R_e}{\varepsilon_e} e^{2\nu \varepsilon_e}.$$

Les quantités connues dans cette équation sont $R_e = 1176$ MPa et $\varepsilon_e = 0.02$, mais le coefficient de Poisson ν du matériau est inconnu, on ne peut donc pas aller plus loin. On peut toutefois donner une fourchette pour E en considérant les cas extrêmes.

- La plus grande valeur possible de E correspond au cas où la barre présente des diminutions latérales maximales, soit dans le cas incompressible : $\nu = 0.5$. Dans ce cas, on a que

$$E_{\text{max}} = \frac{1176}{0.02} e^{2 \times 0.5 \times 0.02} \simeq 59'988 \text{ MPa} \simeq 60 \text{ GPa}. \quad (4)$$

- A l'inverse, la plus petite valeur possible de E correspondra au cas limite où les diminutions latérales de la barre sont nulles, soit lorsque $\nu = 0$. On a donc que

$$E_{\text{min}} = \frac{1176}{0.02} e^{2 \times 0.0 \times 0.02} \simeq 58'800 \text{ MPa} = 58.8 \text{ GPa}. \quad (5)$$

La fourchette obtenue :

$$E \in [58.8, 60.0] \text{ GPa.} \quad (6)$$

est donc assez serrée, en raison de la petitesse de ε_e .

- e) Si le matériau suit une loi de Ludwik, le coefficient d'écroutissage n correspond exactement au taux de déformation réel en résistance ε_m :

$$n = \varepsilon_m = 0.1. \quad (7)$$

- f) La courbe qui représente la charge F en fonction du taux de déformation réel ε est **exactement** la courbe de traction, à une modification de l'échelle verticale près :

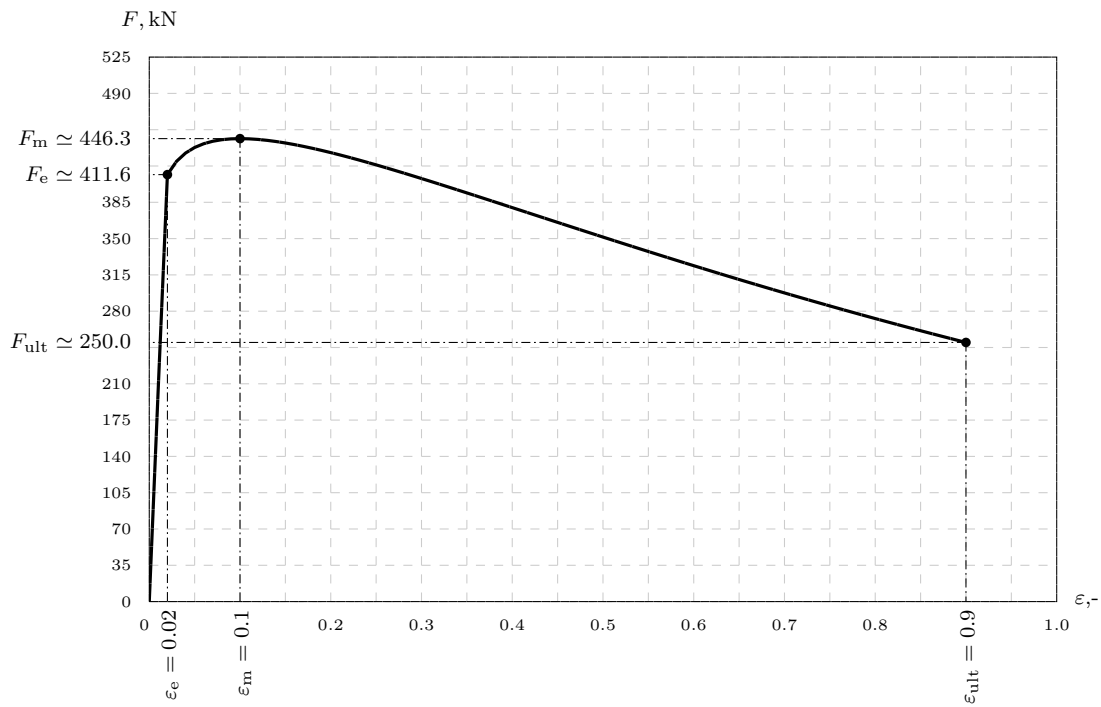


FIGURE 3 – Charge en fonction de la déformation

Exercice 2

- a) Le taux de déformation réel en limite élastique ε_e du matériau est lié à la limite élastique réelle σ_e et au module d'Young E :

$$\sigma_e = E\varepsilon_e.$$

Si on résoud pour ε_e , on trouve que

$$\varepsilon_e = \frac{690}{30'000} = 0.023 \quad (1)$$

- b) La limite élastique réelle R_e est à son tour, liée au module d'Young, au coefficient de Poisson ν ainsi qu'à ε_e :

$$R_e = E\varepsilon_e e^{-2\nu\varepsilon_e} \simeq 30'000 \times 0.023 e^{-2 \times 0.42 \times 0.023} \simeq 676.8 \text{ MPa}. \quad (2)$$

- c) La résistance R_m du matériau est liée à son module d'érouissage K . Sous l'hypothèse que le matériau devient totalement incompressible lorsqu'il se plastifie (hypothèse de Considère), on a la relation

$$R_m = K \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{(1-2\nu)\varepsilon_e}. \quad (3)$$

Le module d'érouissage K est lui même fonction du module d'Young E et du taux de déformation réel en limite élastique ε_e :

$$K = E\varepsilon_e^{1-n}.$$

En conséquence, on tire de (3) que

$$R_m = E\varepsilon_e^{1-n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{(1-2\nu)\varepsilon_e}.$$

En utilisant les données numériques ainsi que la valeur de $\varepsilon_e = 0.023$ (1) on conclut que :

$$R_m \simeq 30'000 \times 0.023^{1-0.2} \left(\frac{0.2}{2.71828} \right)^{0.2} \times 2.71828^{(1-2 \times 0.42) \times 0.023} \simeq 873.87 \text{ MPa}. \quad (4)$$

- d) La contrainte nominale qu'il est possible d'atteindre avec une machine développant la force $F = 0.1 \text{ MN}$ sur des barres de section $S_0 = 1.2 \text{ cm}^2$ est :

$$\frac{F}{S_0} = \frac{100000 \text{ N}}{1.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 833.33 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 833.33 \text{ MPa}. \quad (5)$$

Comme cette contrainte est supérieure à la limite élastique $R_e = 676.8 \text{ MPa}$ du matériau (2) et inférieure à la résistance (4), le taux de déformation réel maximal ε_{\max} qu'on pourra obtenir s'obtient en résolvant l'équation transcendante :

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{n} e^{1 - \frac{\varepsilon_{\max}}{n}} \right)^n,$$

grâce à l'algorithme vu au cours.

On forme la quantité

$$\alpha = \frac{1}{e} \sqrt[n]{\frac{1}{R_m} \frac{F}{S_0}}$$

qui, compte tenu des valeurs (4) de la résistance R_m et (5) du rapport $\frac{F}{S_0}$, vaut

$$\alpha \simeq \frac{1}{2.71828} \sqrt[0.2]{\frac{833.33}{873.87}} \simeq 0.2901117$$

puis on effectue l'itération de point fixe

$$x_{m+1} = \alpha e^{x_m}, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

à partir de la condition initiale $x_0 = \alpha$ jusqu'à convergence approximative vers une valeur \bar{x} . Les quatorze premières itérations donnent les résultats suivants :

m	x_m	nx_m
0	0.2901117	0.05802234
1	0.38775656	0.07755131
2	0.4275292	0.085505836
3	0.4448758	0.08897516
4	0.45266023	0.09053205
5	0.45619768	0.091239534
6	0.4578143	0.09156286
7	0.45855504	0.09171101
8	0.45889482	0.091778964
9	0.45905077	0.09181016
10	0.45912236	0.09182447
11	0.45915523	0.09183105
12	0.4591703	0.09183406
13	0.45917726	0.091835454
14	0.4591804	0.09183609

TABLE 2 – Quatorze itérations de point fixe.

La conclusion que l'on tire est que

$$\varepsilon_{\max} \simeq n\bar{x} \simeq 0.09183609 \tag{6}$$