Procédés de fabrication I - IGI 14 octobre 2026
E.Boillat

Corrigé de la série 2.

Exercice 1

a) La courbe de traction réelle consiste en une montée linéaire de pente E du point $(0,0)$ au point EL de coordonnées $(\varepsilon_e, E\varepsilon_e)$. Elle se prolonge ensuite entre les abscisses ε_e et ε_{ult} par le graphe de l'application $\varepsilon \to K\varepsilon^n$ avec K choisi de tel façon qu'on assure la continuité :

$$K = E\varepsilon^{1-n}.$$

Dans notre cas, avec les données numériques on a que $E = 100\,\text{GPa}$ et que

$$K \approx 4.373\,\text{GPa}. \tag{1}$$

et on obtient la courbe de traction dessinée à la Fig. 2

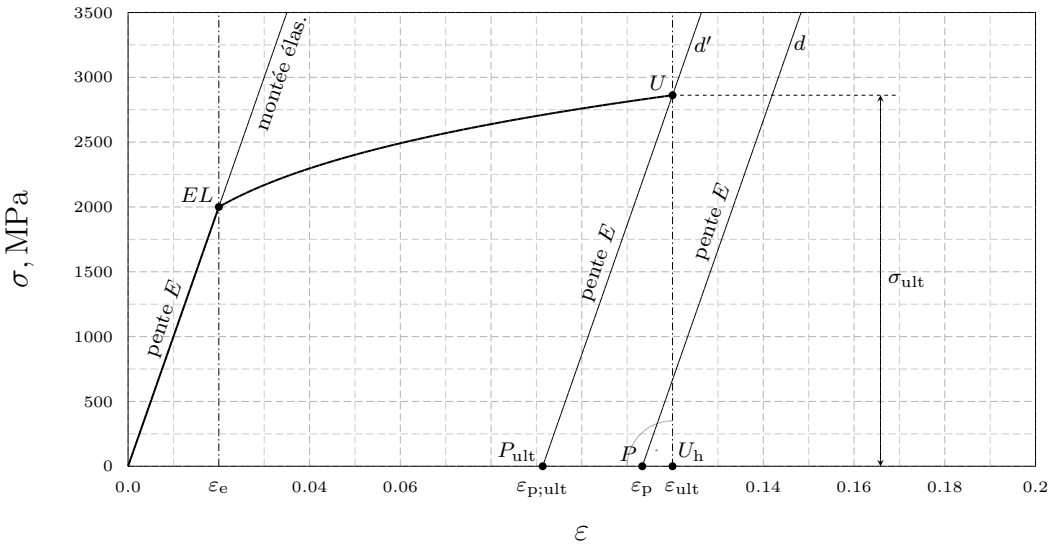


FIGURE 2 – Courbe de traction réelle du matériau recuit

b) La contrainte de traction ultime σ_{ult} est donnée par la loi de Ludwik où on utilise les données numériques $n = 0.2$ et $K \approx 4.373$ (1) :

$$\sigma_{ult} = K\varepsilon_{ult}^n \approx 4.373 \times 0.12^{0.2} \approx 2.861\,\text{GPa} = 2861\,\text{MPa} \tag{2}$$

c) Le taux de déformation réel permanent requis par votre client est

$$\varepsilon_p = \ln\frac{\ell_p}{\ell_0} = \ln\frac{112}{100} = \ln 1.12 \approx 0.11332.$$

Pour déterminer graphiquement le taux de déformation réel ε_r à atteindre en relaxation, on place le point P de coordonnées $(\varepsilon_\mathrm{p}, 0.0) \approx (0.11332, 0.0)$ dans le graphe de la Fig. 2. Par ce point, on mène une parallèle d à la droite de montée élastique et on identifie l'intersection de cette droite avec la courbe de traction. On observe ici que cette intersection **n'existe pas**. Cela signifie que l'opération est impossible. Il faudrait, en fait, déformer la barre **au-delà de sa rupture** pour obtenir l'allongement demandé.

d) Le plus grand taux de déformation $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$ qu'on peut atteindre est celui qu'on obtient en relâchant la barre au seuil de sa rupture soit lorsque $\varepsilon \simeq \varepsilon_\mathrm{ult}$. Pour identifier $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$ il suffit donc de placer le point de relaxation U de coordonnées $(\varepsilon_\mathrm{ult}, \sigma_\mathrm{ult})$ dans la Fig. 2, puis de mener par ce point la droite d' parallèle à la droite de montée élastique. Cette droite coupe l'axe horizontale au point P_ult dont la coordonnées est exactement la valeur $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$ recherchée. Pour calculez avec précision la valeur de $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$, on place le point U_h de coordonnées $(\varepsilon_\mathrm{ult}, 0)$ sur la Fig. 2. On observe ensuite que le triangle $UU_\mathrm{h}P_\mathrm{ult}$ est rectangle en U_h et que la pente de son hypothénuse vaut E par définition. On peut donc écrire :

$$\frac{U_\mathrm{h}U}{U_\mathrm{h}P} = E. \tag{3}$$

Sur la Fig. 2, on peut encore constater que la longueur du segment $U_\mathrm{h}U$ est la contrainte de traction ultime σ_ult calculée en (2) et que la longueur du segment $U_\mathrm{h}P_\mathrm{ult}$ est le rebond entre ε_ult et $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$. Portant ces deux informations dans (3), on obtient une équation :

$$\frac{\sigma_\mathrm{ult}}{\varepsilon_\mathrm{ult} - \varepsilon_{\mathrm{p;ult}}} = E$$

qu'on peut résoudre pour la quantité inconnue $\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}$. Utilisant les données numériques $\varepsilon_\mathrm{ult} = 0.12$, $E = 100\,\mathrm{GPa}$ et $\sigma_\mathrm{r} = 2.861\,\mathrm{GPa}$, il vient :

$$\varepsilon_{\mathrm{p;ult}} = \varepsilon_\mathrm{ult} - \frac{\sigma_\mathrm{ult}}{E} \approx 0.12 - \frac{2.861}{100} \approx 0.0914. \tag{4}$$

e) Après la première traction, le taux de déformation permanent induit dans la barre vaut $\varepsilon_\mathrm{p} = \varepsilon_{\mathrm{p;ult}} \approx 0.0914$ et la longueur permanente atteinte est

$$l_\mathrm{p} = l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}} \approx 100 \times \mathbf{e}^{0.0914} \approx 109.56\,\mathrm{mm}.$$

La seconde traction applique le même taux de déformation permanent, soit $\varepsilon_\mathrm{p} \approx 0.0914$ mais, cette fois, la longueur initiale l'_0 de la barre n'est plus de 100 mm. Puisque le revenu ne modifie quasiment pas les dimensions des pièces, cette longueur, appelée aussi longueur de revenu, vaut environ :

$$l'_0 = l_\mathrm{p} \approx 109.56\,\mathrm{mm},$$

Dans ces conditions, on peut prédire la longueur permanente atteinte en fin d'expérience. Elle sera

$$l'_\mathrm{p} = l'_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{\mathrm{p;ult}}} \approx 109.56 \times \mathbf{e}^{0.0914} \approx 120.05\,\mathrm{mm}.$$

et est plus grande que la longueur que votre client vous demandait d'atteindre (112 mm). Il vous sera donc possible de le satisfaire en pratiquant à deux étirages entre lesquels vous intercalerez une opération de revenu.

f) Si on omet l'opération de revenu, alors l'échantillon qu'on va soumettre à la seconde traction sera **écroui**. Selon la théorie vue au cours, il va retourner à l'état de relaxation R de façon élastique puis se déformer plastiquement en reproduisant la courbe de traction du matériau recuit (cf. Fig : 3) :

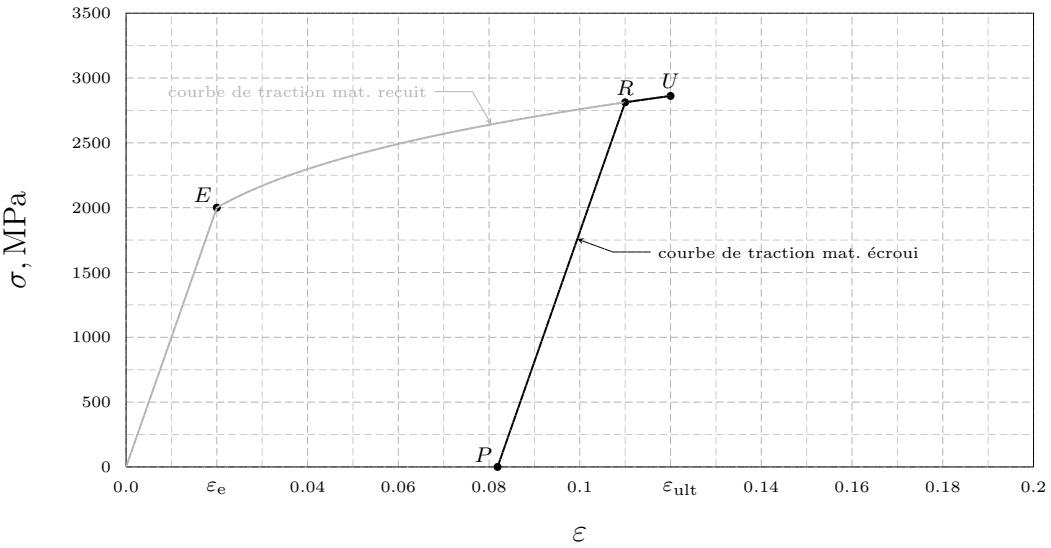


FIGURE 3 – Courbes de traction réelles du matériau recuit (en gris) et écroui (en noir)

Toutefois, comme l'état de relaxation R correspondait pratiquement à l'état de rupture U :

$$R \simeq U,$$

on peut prédire que l'échantillon va casser aussitôt après sa sortie de la zone élastique.

Exercice 2

a) L'équation de la déformation permanente donne immédiatement ε_{p} en fonction de ε_{r} :

$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = \varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{e}} \left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{e}}} \right)^{n} \tag{1}$$

soit, en tenant compte que $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1.2$ et en utilisant les données numériques de la Tab. 1 :

$$\varepsilon_{\mathrm{p}} = 1.2 - 0.05 \times \left(\frac{1.2}{0.05} \right)^{0.26} \simeq 1.0857. \tag{2}$$

b) La loi de Poisson donne le volume à la limite élastique :

$$V_{\mathrm{e}} = V_0 \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}} \simeq 100 \mathbf{e}^{(1-2\times 0.3)\times 0.05} \simeq 102.02\,\mathrm{cc} \tag{3}$$

c) Selon Considère, le volume du matériau ne change pas durant toute la déformation plastique, en conséquence :

$$V_{\mathrm{r}} = V_{\mathrm{e}} \simeq 102.02\,\mathrm{cc} \tag{4}$$

d) Pour le calculer, on va mettre le volume permanent V_{p} en relation avec le volume V_{r} atteint en relaxation et exprimé en (4). Pour y parvenir, on utilise une information importante donnée au cours et illustrée sur la Fig. 1. Cette information est que si la barre déformée de façon permanente est remise en traction elle retourne **élastiquement** à l'état de relaxation. L'élasticité de la transformation p $\rightarrow$ r nous permet d'écrire la relation de Poisson intégrée entre V_{p} (volume initial) et V_{r} (volume final) :

$$V_{\mathrm{r}} = V_{\mathrm{p}} \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon} \tag{5}$$

soit, si on résoud maintenant pour le volume inconnu V_{p} :

$$V_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{r}} \mathbf{e}^{-(1-2\nu)\varepsilon} \tag{6}$$

Pour que les relations (5) et (6) soient valables, il faut biensûr que ε soit le taux de déformation correspondant à la transformation considérée (cf. Fig. 1) :

$$\varepsilon = \ln \frac{l_{\mathrm{r}}}{l_{\mathrm{p}}} = \ln \frac{l_{\mathrm{r}} l_0}{l_0 l_{\mathrm{p}}} = \ln \frac{l_{\mathrm{r}}}{l_0} \frac{l_0}{l_{\mathrm{p}}} = \ln \frac{l_{\mathrm{r}}}{l_0} - \ln \frac{l_{\mathrm{p}}}{l_0} = \varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{p}}$$

soit, si on utilise que $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1.2$ et que $\varepsilon_{\mathrm{p}} \simeq 1.0857$ (2)

$$\varepsilon = 1.2 - 1.0857 \simeq 0.1143.$$

Remplaçant ε par cette valeur et tenant compte que $V_{\mathrm{r}} \simeq 102.02\,\mathrm{cc}$ (4), on tire de la relation (6) que

$$V_{\mathrm{p}} = 102.02 \times \mathbf{e}^{-(1-2\times 0.3)\times 0.1143} \simeq 97.46\,\mathrm{cc} \quad \textbf{(théorie de Considère)}. \tag{7}$$

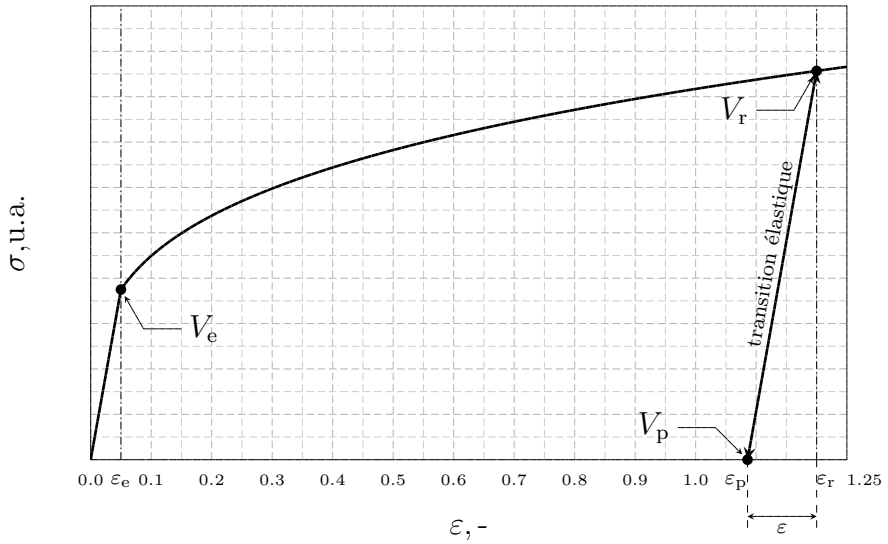


FIGURE 1 – Courbe de traction réelle avec relaxation

e) L'hypothèse de Considère amène à la conclusion que le volume permanent atteint par la barre après étirage et relaxation est **plus petit** que le volume de départ :

$$97.463\,\text{cc} < 100\,\text{cc}. \tag{8}$$

Cela est dû au fait qu'il n'y a, dans la théorie de Considère, que deux mécanismes qui modifient les volumes :

i) la montée élastique au départ qui augmente le volume,

ii) le rebond élastique après la relaxation qui le diminue.

Or, à cause de l'écrouissage, le rebond correspond à un taux de déformation réel plus grand, en valeur absolu, que le taux de déformation réel lié à la montée élastique. Le retrait dû au rebond est donc plus important que la dilatation due à la montée ce qui, globalement, implique un rétrecissement (8).

Dans la pratique on n'observe jamais de rétrecissement entre le volume initial et le volume permanent d'un échantillon ayant été soumis à une traction. Pour la plupart des matériaux classiques (polymères, métaux), le volume permanent est égal au volume initial et les formules de Considère doivent être remplacées par celles de Hencky.

Exercice 3

a) **Calcul de la longueur de relaxation.** Rappelons qu'une déformation permanente ne peut pas modifier le volume de l'échantillon (loi de Hencky). La longueur finale de la barre l_p est liée à son rayon final r_p par la relation de conservation qui dit que le volume après déformation permanente est égal au volume initial :

$$\pi l_p r_p^2 = \pi l_0 r_0^2.$$

Cette relation implique que l'allongement relatif est égal à

$$\frac{l_p}{l_0} = \frac{r_0^2}{r_p^2} = \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^2 = 4$$

puisqu'on veut diminuer le rayon de moitié : $r_p = \frac{1}{2}r_0$. La déformation permanente que l'on cherche à atteindre correspond donc à un taux réel de

$$\varepsilon_p = \ln 4 \simeq 1.3862.$$

Le taux de déformation réel ε_r à atteindre au moment du relâchement de la barre se déduit graphiquement en identifiant l'intersection entre la courbe de traction réelle et la parallèle à la montée élastique (cf. Fig. 1)

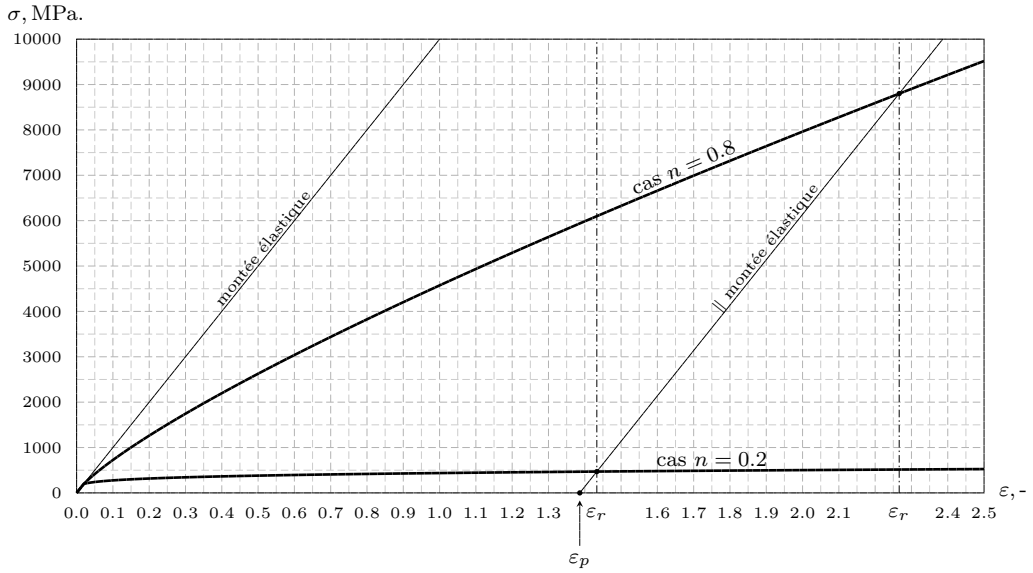


FIGURE 1 – Résolution graphique de l'équation de la déformation permanente

Les résultats sont

$$\varepsilon_r \approx 2.2662, \quad \text{si } n = 0.8,$$
$$\varepsilon_r \approx 1.4332, \quad \text{si } n = 0.2.$$

et on trouve que la longueur de la barre, au moment où il convient de la relâcher, doit être de

$$l_r = l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_r} = 9.64\,\text{m}, \quad \text{si } n = 0.8,$$
$$l_r = l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_r} = 4.19\,\text{m}, \quad \text{si } n = 0.2.$$

b) **Commentaires.** La déformation qu'il faut atteindre au moment de la relaxation est beaucoup plus grande avec le matériau à fort coefficient d'écrouissage (9.64 m pour $n = 0.8$ contre seulement 4.19 m pour $n = 0.2$). Cela illustre qu'un matériau à fort coefficient d'écrouissage implique des rebonds élastiques plus importants. Il est donc en principe plus difficile à mettre en forme qu'un matériau à plus faible coefficient d'écrouissage.

c) **Dimensionnement des forces.** Les taux de déformation réels ε_r à atteindre au moment du relâchement de la force on été calculés au point a On a obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= 2.2622, \quad \text{pour le matériau avec } n = 0.8 \\ \varepsilon_r &= 1.4332, \quad \text{pour le matériau avec } n = 0.2. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, ces taux sont supérieurs au taux de déformation réel en résistance $\varepsilon_m = n$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= 0.8 < \varepsilon_r, \quad \text{pour le matériau avec } n = 0.8 \\ \varepsilon_m &= 0.2 < \varepsilon_r, \quad \text{pour le matériau avec } n = 0.2. \end{aligned}$$

En conséquence, la force maximale F est celle qui est appliquée au moment du maximum d'écrouissage. Elle est égale au produit de la section initiale S_0 de la barre :

$$S_0 = \pi r_0^2 \simeq 3.1415 \times 0.02^2 \simeq 1.2566 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

par la résistance du matériau qui vaut, dans le cas incompressible :

$$R_m = K\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n = E\varepsilon_e\left(\frac{n}{\varepsilon_e \mathbf{e}}\right)^n$$

où on a utilisé la formule $K = E\varepsilon_e^{1-n}$. Avec les données numériques, on trouve que

$$\begin{aligned} R_m &= 200'000 \times 0.02 \times \left(\tfrac{0.8}{0.02\times 2.7182}\right)^{0.8} \simeq 3.437 \times 10^4\,\mathrm{MPa}, \quad \text{si } n = 0.8, \\ R_m &= 200'000 \times 0.02 \times \left(\tfrac{0.2}{0.02\times 2.7182}\right)^{0.2} \simeq 5.190 \times 10^3\,\mathrm{MPa}, \quad \text{si } n = 0.2, \end{aligned}$$

En conclusion, la force maximale que la machine d'étirage doit pouvoir développer est de

$$\begin{aligned} F_{max} &= R_m S_0 \simeq 3.437 \times 10^4 \times 1.2566 \times 10^{-3} \simeq 43.19\,\mathrm{MN}, \quad \text{si } n = 0.8, \\ F_{max} &= R_m S_0 \simeq 5.190 \times 10^3 \times 1.2566 \times 10^{-3} \simeq 6.52\,\mathrm{MN}, \quad \text{si } n = 0.2. \end{aligned}$$

d) **Commentaires.** On peut à nouveau observer que le matériau à fort coefficient d'écrouissage est plus difficile à travailler que le matériau à faible coefficient d'écrouissage. Il implique en effet l'utilisation d'une machine plus de 7 fois plus puissante.