

## Corrigé de la série 2.

### Exercice 1

- a) La courbe de traction réelle consiste en une montée linéaire de pente  $E$  du point  $(0,0)$  au point  $EL$  de coordonnées  $(\varepsilon_e, E\varepsilon_e)$ . Elle se prolonge ensuite entre les abscisses  $\varepsilon_e$  et  $\varepsilon_{ult}$  par le graphe de l'application  $\varepsilon \rightarrow K\varepsilon^n$  avec  $K$  choisi de tel façon qu'on assure la continuité :

$$K = E\varepsilon^{1-n}.$$

Dans notre cas, avec les données numériques on a que  $E = 100$  GPa et que

$$K \approx 4.373 \text{ GPa}. \quad (1)$$

et on obtient la courbe de traction dessinée à la Fig. 2

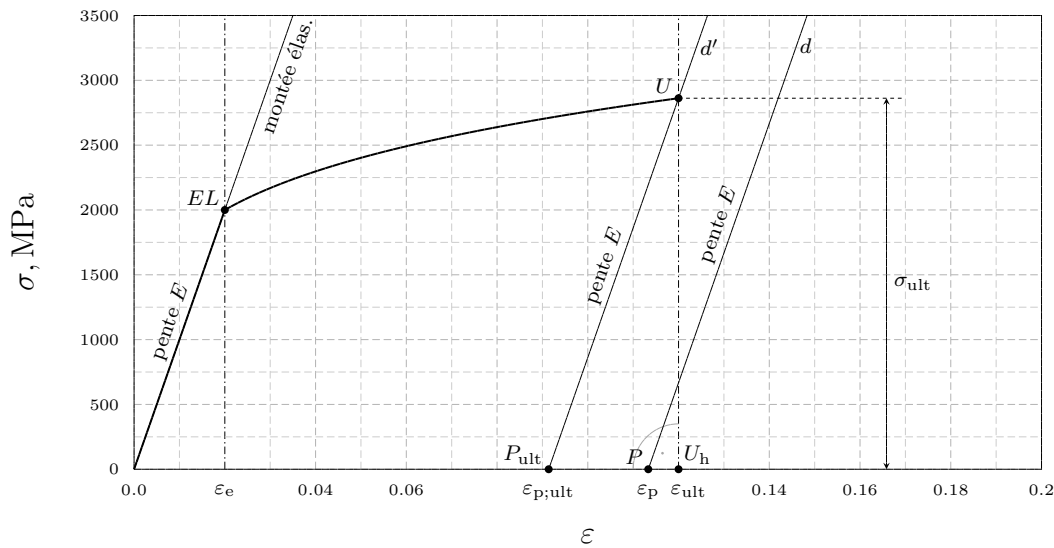


FIGURE 2 – Courbe de traction réelle du matériau recuit

- b) La contrainte de traction ultime  $\sigma_{ult}$  est donnée par la loi de Ludwik où on utilise les données numériques  $n = 0.2$  et  $K \approx 4.373$  (1) :

$$\sigma_{ult} = K\varepsilon_{ult}^n \approx 4.373 \times 0.12^{0.2} \approx 2.861 \text{ GPa} = 2861 \text{ MPa} \quad (2)$$

- c) Le taux de déformation réel permanent requis par votre client est

$$\varepsilon_p = \ln \frac{\ell_p}{\ell_0} = \ln \frac{112}{100} = \ln 1.12 \approx 0.11332.$$

Pour déterminer graphiquement le taux de déformation réel  $\varepsilon_r$  à atteindre en relaxation, on place le point  $P$  de coordonnées  $(\varepsilon_p, 0.0) \approx (0.11332, 0.0)$  dans le graphe de la Fig. 2. Par ce point, on mène une parallèle  $d$  à la droite de montée élastique et on identifie l'intersection de cette droite avec la courbe de traction. On observe ici que cette intersection **n'existe pas**. Cela signifie que l'opération est impossible. Il faudrait, en fait, déformer la barre **au-delà de sa rupture** pour obtenir l'allongement demandé.

- d) Le plus grand taux de déformation  $\varepsilon_{p;ult}$  qu'on peut atteindre est celui qu'on obtient en relâchant la barre au seuil de sa rupture soit lorsque  $\varepsilon \simeq \varepsilon_{ult}$ . Pour identifier  $\varepsilon_{p;ult}$  il suffit donc de placer le point de relaxation  $U$  de coordonnées  $(\varepsilon_{ult}, \sigma_{ult})$  dans la Fig. 2, puis de mener par ce point la droite  $d'$  parallèle à la droite de montée élastique. Cette droite coupe l'axe horizontale au point  $P_{ult}$  dont la coordonnées est exactement la valeur  $\varepsilon_{p;ult}$  recherchée. Pour calculez avec précision la valeur de  $\varepsilon_{p;ult}$ , on place le point  $U_h$  de coordonnées  $(\varepsilon_{ult}, 0)$  sur la Fig. 2. On observe ensuite que le triangle  $UU_hP_{ult}$  est rectangle en  $U_h$  et que la pente de son hypoténuse vaut  $E$  par définition. On peut donc écrire :

$$\frac{U_h U}{U_h P} = E. \quad (3)$$

Sur la Fig. 2, on peut encore constater que la longueur du segment  $U_h U$  est la contrainte de traction ultime  $\sigma_{ult}$  calculée en (2) et que la longueur du segment  $U_h P_{ult}$  est le rebond entre  $\varepsilon_{ult}$  et  $\varepsilon_{p;ult}$ . Portant ces deux informations dans (3), on obtient une équation :

$$\frac{\sigma_{ult}}{\varepsilon_{ult} - \varepsilon_{p;ult}} = E$$

qu'on peut résoudre pour la quantité inconnue  $\varepsilon_{p;ult}$ . Utilisant les données numériques  $\varepsilon_{ult} = 0.12$ ,  $E = 100$  GPa et  $\sigma_r = 2.861$  GPa, il vient :

$$\varepsilon_{p;ult} = \varepsilon_{ult} - \frac{\sigma_{ult}}{E} \approx 0.12 - \frac{2.861}{100} \approx 0.0914. \quad (4)$$

- e) Après la première traction, le taux de déformation permanent induit dans la barre vaut  $\varepsilon_p = \varepsilon_{p;ult} \approx 0.0914$  et la longueur permanente atteinte est

$$l_p = l_0 e^{\varepsilon_{p;ult}} \approx 100 \times e^{0.0914} \approx 109.56 \text{ mm.}$$

La seconde traction applique le même taux de déformation permanent, soit  $\varepsilon_p \approx 0.0914$  mais, cette fois, la longueur initiale  $l'_0$  de la barre n'est plus de 100 mm. Puisque le revenu ne modifie quasiment pas les dimensions des pièces, cette longueur, appelée aussi longueur de revenu, vaut environ :

$$l'_0 = l_p \approx 109.56 \text{ mm,}$$

Dans ces conditions, on peut prédire la longueur permanente atteinte en fin d'expérience. Elle sera

$$l'_p = l'_0 e^{\varepsilon_{p;ult}} \approx 109.56 \times e^{0.0914} \approx 120.05 \text{ mm.}$$

et est plus grande que la longueur que votre client vous demandait d'atteindre (112 mm). Il vous sera donc possible de le satisfaire en pratiquant à deux étirages entre lesquels vous intercalerez une opération de revenu.

f) Si on omet l'opération de revenu, alors l'échantillon qu'on va soumettre à la seconde traction sera **écroui**. Selon la théorie vue au cours, il va retourner à l'état de relaxation  $R$  de façon élastique puis se déformer plastiquement en reproduisant la courbe de traction du matériau recuit (cf. Fig : 3) :

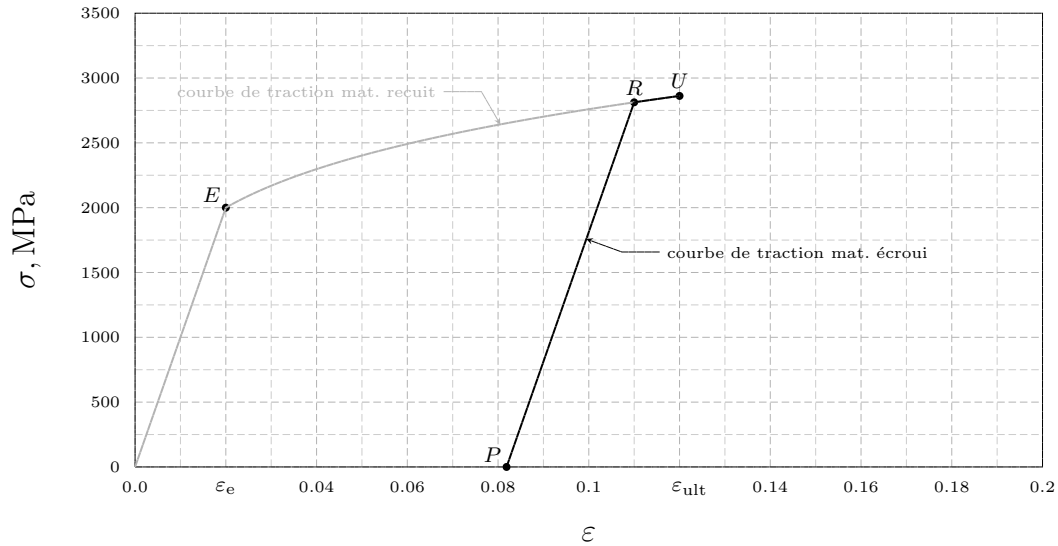


FIGURE 3 – Courbes de traction réelles du matériau recuit (en gris) et écroui (en noir)

Toutefois, comme l'état de relaxation  $R$  correspondait pratiquement à l'état de rupture  $U$  :

$$R \simeq U,$$

on peut prédire que l'échantillon va casser aussitôt après sa sortie de la zone élastique.

## Exercice 2

a) En élasticité la variation du volume est soumise à la loi de Poisson :

$$\frac{V}{V_0} = e^{(1-2\nu)\varepsilon} \quad (1)$$

où  $\nu$  est le coefficient qu'on nous demande de calculer. Dans notre cas, le rapport  $\frac{V}{V_0}$  est connu, il vaut 1.2, Si on connaît aussi le taux de déformation réel  $\varepsilon$ , on pourra identifier  $\nu$  en suivant les étapes ci-dessous :

i) la prise du logarithme de (1) :

$$\ln 1.2 = (1 - 2\nu)\varepsilon$$

ii) la division par  $\varepsilon$  :

$$\frac{\ln 1.2}{\varepsilon} = (1 - 2\nu)$$

iii) la résolution pour  $\nu$  :

$$2\nu = 1 - \frac{\ln 1.2}{\varepsilon}$$

soit

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{\ln 1.2}{2\varepsilon}. \quad (2)$$

Comme le taux de déformation réel a été mesuré :

$$\varepsilon \equiv \ln \frac{l}{l_0} = \ln 1.4. \quad (3)$$

on peut tirer de (2) que

$$\nu = 0.5 - \frac{\ln 1.2}{2 \times \ln 1.4} \simeq 0.23. \quad (4)$$

b) Si on connaît  $\varepsilon = \ln 1.4$  et  $\nu \simeq 0.23$ , on peut calculer le rapport entre le rayon final et le rayon initial de la barre en appliquant la loi de Poisson :

$$\frac{r}{r_0} = e^{-\nu\varepsilon} \simeq e^{-0.23 \times \ln 1.4} \simeq 0.925. \quad (5)$$

ce qui correspond à une diminution du rayon d'environ 7.5%.

### Exercice 3

a) **Calcul de la longueur de relaxation.** La longueur finale de la barre  $l_p$  est liée à son rayon final  $r_p$  par la contrainte d'incompressibilité de la déformation permanente :

$$\pi l_p r_p^2 = \pi l_0 r_0^2$$

qui implique que l'allongement relatif est égal à

$$\frac{l_p}{l_0} = \frac{r_0^2}{r_p^2} = \left(\frac{r_0}{r_p}\right)^2 = 4$$

puisque l'on veut diminuer le rayon de moitié :  $r_p = \frac{1}{2}r_0$ . La déformation permanente que l'on cherche à atteindre correspond donc à un taux réel de

$$\varepsilon_p = \ln 4 \simeq 1.3862.$$

Le taux de déformation réel  $\varepsilon_r$  à atteindre au moment du relâchement de la barre se déduit graphiquement en identifiant l'intersection entre la courbe de traction réelle (dessinée pour une valeur arbitraire du module d'élasticité  $E$  (cf. Remarque 3) ci-dessous) et la parallèle à la montée élastique (cf. Fig. 1)

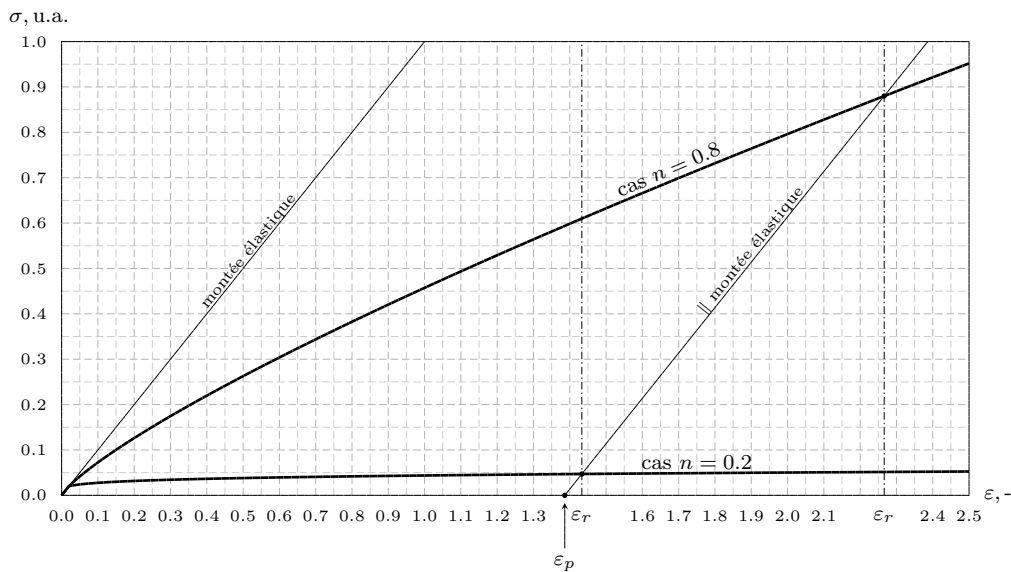


FIGURE 1 – Résolution graphique de l'équation de la déformation permanente

Les résultats sont

$$\varepsilon_r \approx 2.2662, \quad \text{si } n = 0.8,$$

$$\varepsilon_r \approx 1.4332, \quad \text{si } n = 0.2.$$

et on trouve que la longueur de la barre, au moment où il convient de la relâcher, doit être de

$$l_r = l_0 e^{\varepsilon_r} = 9.64 \text{ m}, \quad \text{si } n = 0.8,$$

$$l_r = l_0 e^{\varepsilon_r} = 4.19 \text{ m}, \quad \text{si } n = 0.2.$$

- b) **Commentaires.** La déformation qu'il faut atteindre au moment de la relaxation est beaucoup plus grande avec le matériau à fort coefficient d'écroissage (9.64 m pour  $n = 0.8$  contre seulement 4.19 m pour  $n = 0.2$ ). Cela illustre qu'un matériau à fort coefficient d'écroissage implique des rebonds élastiques plus importants. Il est donc en principe plus difficile à mettre en forme qu'un matériau à plus faible coefficient d'écroissage.

### Remarque

Nous nous proposons d'illustrer par une construction graphique que la valeur de  $\varepsilon_r$  ne dépend pas de la valeur du module d'Young. Le raisonnement est présenté sur la Fig. 2.

Dans le repère de la courbe de traction réelle  $(\varepsilon, \sigma)$ , on appelle  $P$  le point de coordonnées  $(\varepsilon_p, 0.0)$  correspondant à l'état de déformation qu'on souhaite atteindre. On trace ensuite une première courbe de traction réelle (trait plein) qui correspond à une certaine valeur  $E$  du module d'élasticité. Par  $P$  on mène une droite  $d$  de pente

$$p = E. \quad (4)$$

Elle coupe la courbe de traction au point  $R$ . La projection  $R_0$  de  $R$  sur l'axe horizontal est localisé au taux  $\varepsilon_r$  à atteindre en relaxation.

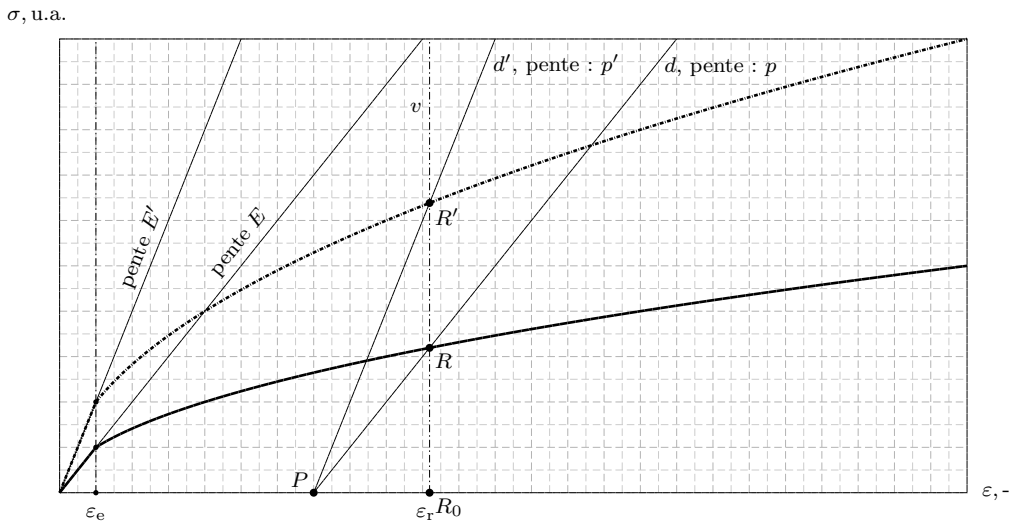


FIGURE 2 – Résolution graphique de l'équation de la déformation permanente

On dessine ensuite une autre courbe de traction (en traitillé sur la Fig. 2) qui correspond à une autre valeur  $E'$  du module d'élasticité mais au même coefficient d'écroissage  $n$  et au même taux de déformation en limite élastique  $\varepsilon_e$ . On se propose de montrer que, dans ce cas,

$$\varepsilon'_r = \varepsilon_r. \quad (5)$$

Notre argument essentiel pour prouver (5) est que la courbe de traction en traitillé se déduit de celle en trait plein par une homothétie de rapport

$$\frac{E'}{E}, \quad (6)$$

cela est dû au fait que le module d'écroûissage est en proportion du module d'élasticité :

$$K' = E' \varepsilon_e^{1-n}.$$

Dans ces conditions, la construction qui démontre (5) est la suivante. On trace la verticale  $v$  par le point  $R_0$  de coordonnée  $(\varepsilon_r, 0)$ . Cette droite coupe la courbe de traction en traitillé au point  $R'$ . On trace alors la droite  $d'$  passant pas le point  $R'$  et le point de déformation permanente  $P$ . La preuve de (5) se réduit alors à démontrer que la pente  $p'$  de la droite  $d'$  vaut  $E'$ , soit

$$p' = E'. \quad (7)$$

Puisque la courbe en traitillé est obtenue par une homothétie de rapport (6) à partir de la courbe en trait plein, les segments  $R_0R'$  et  $R_0R$  sont dans cette proportion :

$$\frac{R_0R'}{R_0R} = \frac{E'}{E}.$$

Il s'ensuit que les pentes des droites  $d'$  et  $d$  sont dans ce rapport aussi :

$$\frac{p'}{p} = \frac{E'}{E}.$$

De cette relation, on tire que

$$p' = \frac{E'}{E} p. \quad (8)$$

Or par définition  $p = E$  (4). Portant cette information dans (8) on conclut que la relation (7) est bien satisfaite, ce qui achève la preuve de (5).

c) **Dimensionnement des forces.** Les taux de déformation réels  $\varepsilon_r$  à atteindre au moment du relâchement de la force on été calculés au point a On a obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= 2.2622, & \text{pour le matériau avec } n = 0.8 \\ \varepsilon_r &= 1.4332, & \text{pour le matériau avec } n = 0.2. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, ces taux sont supérieurs au taux de déformation réel en résistance  $\varepsilon_m = n$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= 0.8 < \varepsilon_r, & \text{pour le matériau avec } n = 0.8 \\ \varepsilon_m &= 0.2 < \varepsilon_r, & \text{pour le matériau avec } n = 0.2. \end{aligned}$$

En conséquence, la force maximale  $F$  est celle qui est appliquée au moment du maximum d'écroûissage. Elle est égale au produit de la section initiale  $S_0$  de la barre :

$$S_0 = \pi r_0^2 \simeq 3.1415 \times 0.02^2 \simeq 1.2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

par la résistance du matériau qui vaut, dans le cas incompressible :

$$R_m = K \left( \frac{n}{\varepsilon_e} \right)^n = E \varepsilon_e \left( \frac{n}{\varepsilon_e} \right)^n$$

où on a utilisé la formule  $K = E \varepsilon_e^{1-n}$ . Avec les données numériques, on trouve que

$$R_m = 200'000 \times 0.02 \times \left(\frac{0.8}{0.02 \times 2.7182}\right)^{0.8} \simeq 3.437 \times 10^4 \text{ MPa, si } n = 0.8,$$

$$R_m = 200'000 \times 0.02 \times \left(\frac{0.2}{0.02 \times 2.7182}\right)^{0.2} \simeq 5.190 \times 10^3 \text{ MPa, si } n = 0.2,$$

En conclusion, la force maximale que la machine d'étirage doit pouvoir développer est de

$$F_{max} = R_m S_0 \simeq 3.437 \times 10^4 \times 1.2566 \times 10^{-3} \simeq 43.19 \text{ MN, si } n = 0.8,$$

$$F_{max} = R_m S_0 \simeq 5.190 \times 10^3 \times 1.2566 \times 10^{-3} \simeq 6.52 \text{ MN, si } n = 0.2.$$

- d) **Commentaires.** On peut à nouveau observer que le matériau à fort coefficient d'érouissage est plus difficile à travailler que le matériau à faible coefficient d'érouissage. Il implique en effet l'utilisation d'une machine plus de 7 fois plus puissante.

#### Exercice 4

- a) L'équation de la déformation permanente donne immédiatement  $\varepsilon_p$  en fonction de  $\varepsilon_r$  :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_r - \varepsilon_e \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n \quad (1)$$

soit, en tenant compte que  $\varepsilon_r = 1.2$  et en utilisant les données numériques de la Tab. 1 :

$$\varepsilon_p = 1.2 - 0.05 \times \left(\frac{1.2}{0.05}\right)^{0.26} \simeq 1.0857. \quad (2)$$

- b) La loi de Poisson donne le volume à la limite élastique :

$$V_e = V_0 e^{(1-2\nu)\varepsilon_e} \simeq 100 e^{(1-2 \times 0.3) \times 0.05} \simeq 102.02 \text{ cc} \quad (3)$$

- c) Selon Considère, le volume du matériau ne change pas durant toute la déformation plastique, en conséquence :

$$V_r = V_e \simeq 102.02 \text{ cc} \quad (4)$$

- d) Pour le calculer, on va mettre le volume permanent  $V_p$  en relation avec le volume  $V_r$  atteint en relaxation et exprimé en (4). Pour y parvenir, on utilise une information importante donnée au cours et illustrée sur la Fig. 1. Cette information est que si la barre déformée de façon permanente est remise en traction elle retourne **élastiquement** à l'état de relaxation. L'élasticité de la transformation  $p \rightarrow r$  nous permet d'écrire la relation de Poisson intégrée entre  $V_p$  (volume initial) et  $V_r$  (volume final) :

$$V_r = V_p e^{(1-2\nu)\varepsilon} \quad (5)$$

soit, si on résoud maintenant pour le volume inconnu  $V_p$  :

$$V_p = V_r e^{-(1-2\nu)\varepsilon} \quad (6)$$

Pour que les relations (5) et (6) soient valables, il faut bien sûr que  $\varepsilon$  soit le taux de déformation correspondant à la transformation considérée (cf. Fig. 1) :

$$\varepsilon = \ln \frac{l_r}{l_p} = \ln \frac{l_r l_0}{l_0 l_p} = \ln \frac{l_r}{l_0} - \ln \frac{l_p}{l_0} = \varepsilon_r - \varepsilon_p$$



soit, si on utilise que  $\varepsilon_r = 1.2$  et que  $\varepsilon_p \simeq 1.0857$  (2)

$$\varepsilon = 1.2 - 1.0857 \simeq 0.1143.$$

Remplaçant  $\varepsilon$  par cette valeur et tenant compte que  $V_r \simeq 102.02$  cc (4), on tire de la relation (6) que

$$V_p = 102.02 \times e^{-(1-2 \times 0.3) \times 0.1143} \simeq 97.46 \text{ cc} \quad (\text{théorie de Considère}). \quad (7)$$

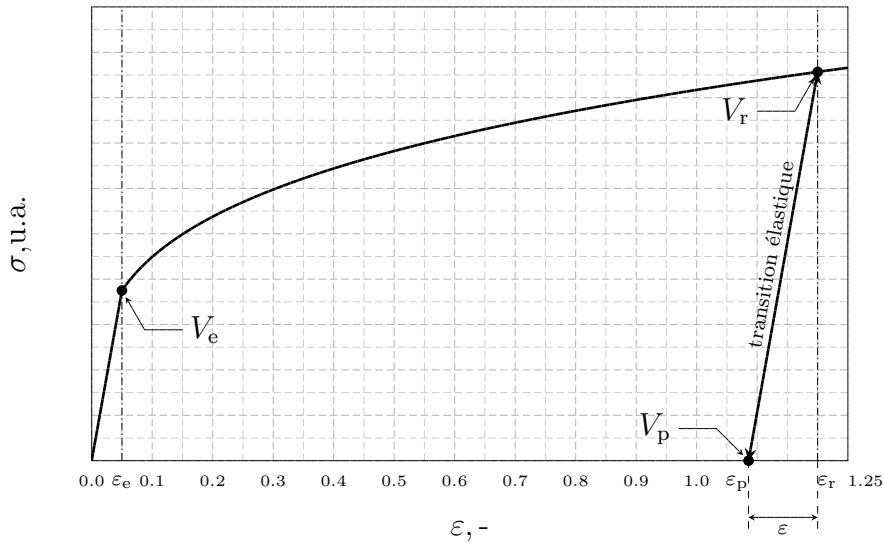


FIGURE 1 – Courbe de traction réelle avec relaxation

e) L'hypothèse de Considère amène à la conclusion que le volume permanent atteint par la barre après étirage et relaxation est **plus petit** que le volume de départ :

$$97.463 \text{ cc} < 100 \text{ cc}. \quad (8)$$

Cela est dû au fait qu'il n'y a, dans la théorie de Considère, que deux mécanismes qui modifient les volumes :

- i) la montée élastique au départ qui augmente le volume,
- ii) le rebond élastique après la relaxation qui le diminue.

Or, à cause de l'érouissage, le rebond correspond à un taux de déformation réel plus grand, en valeur absolue, que le taux de déformation réel lié à la montée élastique. Le retrait dû au rebond est donc plus important que la dilatation due à la montée ce qui, globalement, implique un rétrécissement (8).

Dans la pratique on n'observe jamais de rétrécissement entre le volume initial et le volume permanent d'un échantillon ayant été soumis à une traction. Pour la plupart des matériaux classiques (polymères, métaux), le volume permanent est égal au volume initial et les formules de Considère doivent être remplacées par celles de Hencky.