Procédés de fabrication I - IGI 22 septembre 2026
E.Boillat

Corrigé de la série 1.

Exercice 1

a) La contrainte réele de fin d'expérience prédite par le chef d'atelier qui utilise la loi de Hooke linéarisée est :

$$\sigma = Ee = 50 \times 50 \times 0.005 = 0.250\,\text{GPa} = 250\,\text{MPa}. \tag{4}$$

b) Si on sait ce que vaut $e = \frac{l-l_0}{l_0}$, il n'est pas nécessaire de connaître la longueur initiale l_0 pour calculer le taux de déformation réel

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}. \tag{5}$$

On peut en effet tirer la valeur du rapport $\frac{l}{l_0}$ de la mesure du taux de déformation nominal :

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \Longrightarrow \frac{l}{l_0} = 1 + e.$$

Subsituant le rapport $\frac{l}{l_0}$ par cette dans (5), on obtient une règle de transformation des taux nominaux en taux réels :

$$\varepsilon = \ln(1 + e). \tag{6}$$

Dans notre cas, on aura que

$$\varepsilon = \ln(1 + 0.005) = \ln 1.005 \simeq 0.00498$$

et la vraie loi de Hooke donne ;

$$\sigma = E\varepsilon = 50 \times 0.00498 \approx 0.249\,\text{GPa} = 249\,\text{MPa}. \tag{7}$$

L'erreur commise est faible (moins de 1%) et n'est certainement pas significative. En effet les données, comme la valeur de E ou bien celles de l et l_0 sont rarement mesurées avec une précision plus grande que le pourcent.

c) Dans le cas où $e = 0.75$, alors la contrainte réelle de fin d'expérience prédite par le chef vaudra

$$\sigma = Ee = 50 \times 50 \times 0.75 = 37.5\,\text{GPa} = 37'500\,\text{MPa}. \tag{8}$$

Le taux réel caractérisant cette grande déformation est cette fois (cf. (6)) :

$$\varepsilon = \ln(1 + 0.75) \simeq 0.559,$$

la vraie valeur de la contrainte réelle en fin d'expérience sera

$$\sigma = E\varepsilon = 50 \times 50 \times 0.559 = 27.98\,\text{GPa} = 27'980\,\text{MPa}. \tag{9}$$

Dans le cas des grandes déformations, il n'est donc plus possible d'utiliser la loi de Hooke linéarisée pour calculer les contraintes réelles. Elle conduit systématiquement à un surestimation de l'effort nécessaire pour atteindre le niveau de déformation souhaité.

Exercice 2

a) En élasticité la variation du volume est soumise à la loi de Poisson :

$$\frac{V}{V_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon} \tag{1}$$

où ν est le coefficient qu'on nous demande de calculer. Dans notre cas, le rapport $\frac{V}{V_0}$ est connu, il vaut 1.2, Si on connaît aussi le taux de déformation réel ε, on pourra identifier ν en suivant les étapes ci-dessous :

i) la prise du logarithme de (1) :

$$\ln 1.2 = (1-2\nu)\varepsilon$$

ii) la divison par ε :

$$\frac{\ln 1.2}{\varepsilon} = (1-2\nu)$$

iii) la résolution pour ν :

$$2\nu = 1 - \frac{\ln 1.2}{\varepsilon}$$

soit

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{\ln 1.2}{2\varepsilon}. \tag{2}$$

Comme le taux de déformation réel a été mesuré :

$$\varepsilon \equiv \ln \frac{l}{l_0} = \ln 1.45. \tag{3}$$

on peut tirer de (2) que

$$\nu = 0.5 - \tfrac{\ln 1.2}{2\times \ln 1.45} \simeq 0.25. \tag{4}$$

b) Si on connaît $\varepsilon = \ln 1.45$ et $\nu \simeq 0.25$, on peut calculer le rapport entre le rayon final et le rayon initial de la barre en appliquant la loi de Poisson :

$$\tfrac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon} \simeq \mathbf{e}^{-0.25\times \ln 1.45} \simeq 0.91. \tag{5}$$

ce qui correspond à une diminution du rayon d'environ 9.0%.

Exercice 3

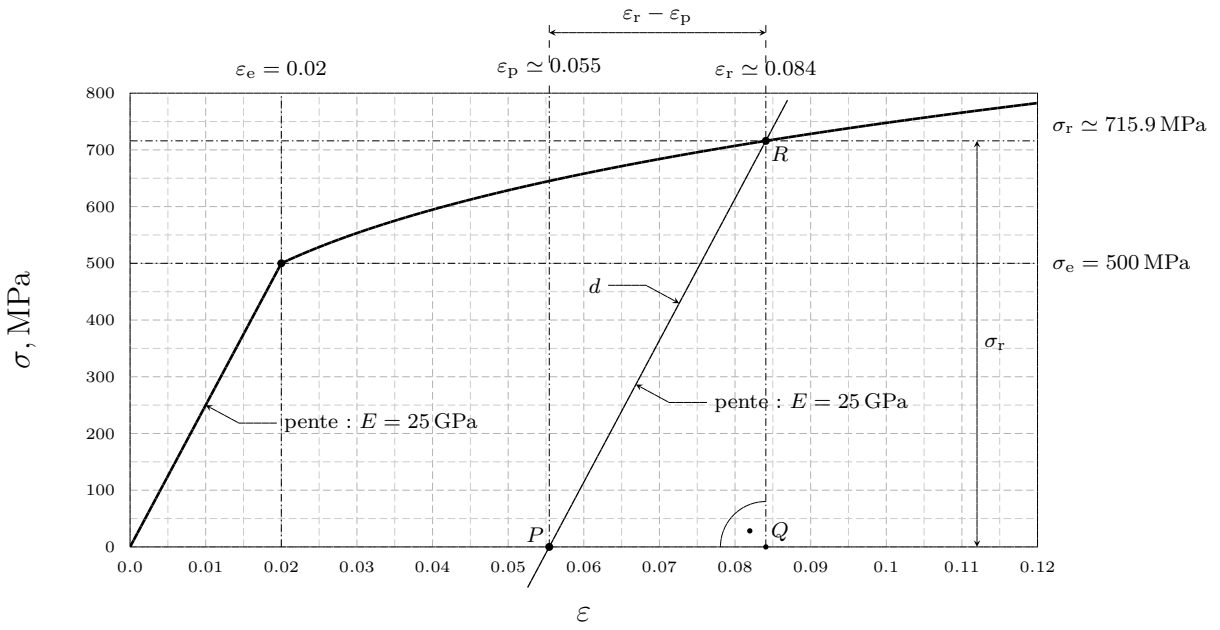


FIGURE 2 – Courbe de traction réelle du matériau $\mathcal{M}$

a) Le taux de déformation réel en limite élastique ε_e et la limite élastique σ_e sont les coordonneées horizontale et, respectivement, verticale du point où la courbe de traction réelle passe d'un comportement linéaire (élasticité) à un comportement sous-linéaire (plasticité). On lit sur la Fig. 2 que

$$\varepsilon_e \approx 0.02 \quad \text{et que} \quad \sigma_e \approx 500\,\text{MPa}.$$

Le module d'Young est la pente de la partie linéaire de la courbe de traction réelle :

$$E = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \approx \frac{500}{0.02} = 25'000\,\text{MPa} = 25\,\text{MPa}.$$

b) L'analyse de l'état de déformation permanente et de l'état de relaxation peut se mener graphiquement.

1) Le taux de déformation réel ε_p qu'on atteint en amenant à la longueur $\ell = 1'057\,\text{mm}$ une barre de longueur initiale $\ell = 1'000\,\text{mm}$ est

$$\varepsilon_p = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln \frac{1'057}{1'000} \approx 0.055$$

2) Pour déterminer l'état de relaxation, on place le point P de coordonnées $(\varepsilon_p \approx 0.055, 0.0)$ dans le graphique de la Fig. 2. Par ce point, on mène une parallèle d à la droite de montée élastique. Le point R en lequel cette droite coupe la courbe de traction réelle est le point de **relaxation**. Ses coordonnées sont $(\varepsilon_r, \sigma_r)$. On mesure sur le dessin que

$$\varepsilon_r \approx 0.084 \quad \text{et que} \quad \sigma_e \approx 716\,\text{MPa}.$$

3) Pour établir l'équation de la déformation permanente, on considère le triangle RQP qui est rectangle en Q (cf. Fig. 2) et on écrit que la pente de son hypothénuse vaut E :

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}} = E. \tag{1}$$

On utilise ensuite que la longueur $\overline{PQ}$ du segment PQ est égale à la différence entre le taux de déformation permanent et le taux de déformation en relaxation :

$$\overline{PQ} = \varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon_\mathrm{p}. \tag{2}$$

La longueur $\overline{RQ}$ du segment RQ correspond elle à la contrainte σ_r atteinte en relaxation. Si on admet que le matériau $\mathcal{M}$ suit une loi de Ludwik pour un coefficient d'écrouissage n, on peut écrire que

$$\sigma_\mathrm{r} = K\varepsilon_\mathrm{r}^n$$

et donc que

$$\overline{RQ} = K\varepsilon_\mathrm{r}^n. \tag{3}$$

Substituant les valeurs (2) et (3) des longueurs des côtés PQ et RQ dans (1), on obtient que

$$\frac{K\varepsilon_\mathrm{r}^n}{\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon_\mathrm{p}} = E.$$

Si on divise cette relation par K et qu'on la multiplie par $\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon_\mathrm{p}$, on trouve que

$$\varepsilon_\mathrm{r}^n = \frac{E}{K}(\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon_\mathrm{p}). \tag{4}$$

Le rapport entre K et E est lié au taux de déformation réel en limite élastique ε_e. Au cours, on a vu en effet que

$$\frac{E}{K} = \frac{E}{E\varepsilon_\mathrm{e}^{1-n}} = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{e}^{1-n}} = \frac{\varepsilon_\mathrm{e}^n}{\varepsilon_\mathrm{e}}.$$

Avec cette information, (4) devient :

$$\varepsilon_\mathrm{r}^n = \frac{\varepsilon_\mathrm{e}^n}{\varepsilon_\mathrm{e}}(\varepsilon_\mathrm{r} - \varepsilon_\mathrm{p}).$$

Si on divise cette relation par ε_e^n on trouve que

$$\frac{\varepsilon_\mathrm{r}^n}{\varepsilon_\mathrm{e}^n} = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{e}} - \frac{\varepsilon_\mathrm{p}}{\varepsilon_\mathrm{e}}$$

soit

$$\frac{\varepsilon_\mathrm{p}}{\varepsilon_\mathrm{e}} = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{e}} - \left(\frac{\varepsilon_\mathrm{r}}{\varepsilon_\mathrm{e}}\right)^n \tag{5}$$

si on réarrange les termes.

Exercice 4

a) Le calcul des contraintes se fait en calculant les taux de dféformations réels puis en utilisant soit la loi de Hooke soit celle de Ludwik suivant qu'on soit ou non en régime élastique.

i) Le taux de déformation réel ε_1 qui est atteint par la première barre lorsque sa longueur est passée à la valeur $\ell' = 2000\,\text{mm}$ vaut

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{\ell'}{\ell_0} = \ln \frac{2000}{1975} \simeq 0.0126. \tag{1}$$

Comme cette valeur est inférieure au taux de déformation réel en limite élastique $\varepsilon_\text{e} = 0.1$, il faut apppliquer la loi de Hooke pour évaluer la préccontrainte σ_1 :

$$\sigma_1 = E\varepsilon \simeq 300 \times 0.0126 \simeq 3.78\,\text{GPa}. \tag{2}$$

ii) Le taux de déformation réel final ε de la première barre se calcule de la façon suivante :

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln \frac{2030}{1975} \simeq 0.0275. \tag{3}$$

Ce taux est toujours inférieur au taux $\varepsilon_\text{e} = 0.1$ caractéristique de la limite élastique, on peut donc appliquer la loi de Hooke pour calculer la contrainte réelle finale :

$$\sigma = E\varepsilon \simeq 300 \times 0.0275 \simeq 8.25\,\text{GPa}. \tag{4}$$

iii) Le taux de déformation ε_2 appliqué à la seconde barre qui passe simplement de la longueur non déformée $\ell' = 2000\,\text{mm}$ à la longueur finale $\ell = 2030\,\text{mm}$ vaut

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{\ell}{\ell'} = \ln \frac{2030}{2000} \simeq 0.0149. \tag{5}$$

Puisque $\varepsilon_2 < \varepsilon_\text{e} = 0.1$, on peut encore une fois appliquer la loi de Hooke pour évaluer la contrainte σ_2 nécessaire à cette opération. On trouve :

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 \simeq 300 \times 0.0149 \simeq 4.47\,\text{GPa}. \tag{6}$$

Compte tenu de (2) et (4), l'incrément de contrainte $\sigma - \sigma_1$ appliquée à la première barre lors de l'étirement final vaut :

$$\sigma - \sigma_1 = 8.25 - 3.78 = 4.47\,\text{GPa} \tag{7}$$

On observe que cette quantité est exactement égale à la contrainte σ_2 (6) nécessaire à effectuer la même déformation sur la barre précontrainte. Cette observation signifie que la précontrainte ne modifie pas la déformabilité de la matière. Mais cela est dû au fait qu'on est resté ici dans le régime élastique (loi de Hooke). On verra ci-après qu'il en va tout autrement lorsqu'on atteint la plasticité : dans ce cas, la précontrainte améliore la déformabilité. Le fait que la précontrainte ne change pas la déformabilité est intimement lié au caractère réversible (donc élastique) des déformations.

b) Considérons maintenant le cas du matériau de plus petite limite élastique

1) Le module d'écrouissage K est lié au taux de déformation réel par la formule de compatibilité entre loi de Hooke et de Ludwik :

$$K = E\varepsilon_e^{1-n} \simeq 300 \times (0.01)^{1-0.26} \simeq 9.934\,\text{GPa}. \tag{8}$$

2) Passons maintenant au calcul des contraintes :

i) Le taux de déformation réel ε_1 qui est atteint par la première barre lorsque sa longueur est passée à la valeur $\ell' = 2000\,\text{mm}$ vaut

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{\ell'}{\ell_0} = \ln \frac{2000}{1975} \simeq 0.0126. \tag{9}$$

Comme cette valeur dépasse le taux de déformation réel en limite élastique $\varepsilon_\text{e} = 0.01$, il faut apppliquer la loi de Ludwik pour évaluer la préccontrainte σ_1 :

$$\sigma_1 = K\varepsilon_1^n \simeq 9.934 \times 0.0126^{0.26} \simeq 3.186\,\text{GPa}. \tag{10}$$

ii) Le taux de déformation réel final ε de la première barre se calcule de la façon suivante :

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln \frac{2030}{1975} \simeq 0.0275. \tag{11}$$

Ce taux est évidemment supérieur au taux ε_1 atteint en fin de première étape. Par voie de conséquence, il est aussi supérieur au taux de déformation réel en limite élastique $\varepsilon_\text{e} = 0.01$ et c'est à nouveau la loi de Ludwik qui donne la valeur de la contrainte finale :

$$\sigma = K\varepsilon \simeq 9.934 \times 0.0275^{0.26} \simeq 3.902\,\text{GPa}. \tag{12}$$

iii) Le taux de déformation ε_2 appliqué à la seconde barre qui passe simplement de la longueur non déformée $\ell' = 2000\,\text{mm}$ à la longueur finale $\ell = 2030\,\text{mm}$ vaut

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{\ell}{\ell'} = \ln \frac{2030}{2000} \simeq 0.0149. \tag{13}$$

Puisque $\varepsilon_2 > \varepsilon_\text{e} = 0.01$, on est encore une fois dans le domaine plastique et il faut appliquer la loi de Ludwik pour évaluer la contrainte σ_2 nécessaire à cette opération. On trouve :

$$\sigma_2 = K\varepsilon_2^n \simeq 9.934 \times 0.0149^{0.26} \simeq 3.320\,\text{GPa}. \tag{14}$$

Compte tenu de (10) et (12), l'incrément de contrainte $\sigma - \sigma_1$ appliquée à la première barre lors de l'étirement final vaut :

$$\sigma - \sigma_1 = 3.902 - 3.186 = 0.716\,\text{GPa} \tag{15}$$

On observe que cette quantité est largement inférieure à la contrainte σ_2 (14) nécessaire à effectuer la même déformation mais sur la barre précontrainte. Cette dernière est donc plus facile à travailler, ce qui n'était pas ce qu'on avait observé dans le régime élastique (item a où on avait constaté que la précontrainte ne modifiait pas la déformabilité.
Le fait que la barre précontrainte soit plus facile à déformer lorsqu'on est en plasticité s'explique en remarquant que c'est dans sa partie élastique que l'étirage nécessite le plus de force. Pour la première barre, l'essentiel de cet effort aura déjà été consenti lors de la mise sous précontrainte.

3) Si le matériau est presque plastiquement idéal, i.e si son coefficient d'écrouissage est quasiment nul :

$$n \approx 0$$

alors la loi de Luwik devient :

$$\sigma = K\varepsilon^n \approx K\varepsilon^0 = K,\ \varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{e}} \tag{16}$$

car n'importe quel nombre positif mis à la puissance 0 donne 1. L'équation (16) signifie que la contrainte σ est pratiquement une constante dans toute la zone plastique. Cette constante doit évidemment correspondre à la limite élastique réel du matériau σ_{e}, autrement dit : $K = \sigma_{\mathrm{e}}$ et

$$\sigma \approx \sigma_{\mathrm{e}},\ \varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{e}}$$

Dans ces conditions, puisque toutes les déformations considérées ici sont plastiques, la précontrainte σ_1 de la première barre et les contraintes finales σ et σ_2 sont toutes égales environ à σ_{e} :

$$\sigma \approx \sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_{\mathrm{e}}.$$

Il s'ensuit que l'incrément de contrainte $\sigma - \sigma_1$ nécessaire à effectuer l'allongement final sur la première barre est presque nul :

$$\sigma - \sigma_1 \approx \sigma_{\mathrm{e}} - \sigma_{\mathrm{e}} = 0.$$

Dans le cas d'un matériau plastiquement idéal, une barre précontrainte en plasticité est donc **infiniment** plus facile à déformer qu'une barre relâchée.

4) La force développée par la machine en fin de traitement de la première barre s'obtient en multipliant l'aire S de sa section droite par la contrainte σ (12) :

$$F = \sigma S \tag{17}$$

Or la surface S est inconnue. En cours de traction, elle diminue à partir de sa valeur initiale

$$S_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 \simeq \frac{3.14}{4} \times 50^2 \simeq 1963\,\mathrm{mm}^2.$$

Si le corps est incompressible, la diminution de S peut être anticipée en appliquant l'équation de conservation du volume :

$$S_0 \ell_0 = S\ell$$

où $\ell_0 = 1975\,\mathrm{mm}$ désigne la longueur initiale de la barre et $\ell = 2030\,\mathrm{mm}$ sa longueur finale. Si on résoud pour S il vient :

$$S = \frac{S_0 \ell_0}{\ell} \simeq \frac{1963 \times 1975}{2030} \simeq 1909\,\mathrm{mm}^2.$$

Substituant cette valeur et celle de la contrainte σ (cf.(12)) dans (17), on trouve la force :

$$F \simeq 3.902 \times 1'909 = 7'452\,\mathrm{kN} = 7.452\,\mathrm{MN}. \tag{18}$$