

Corrigé de la série 1.

Exercice 1

- a) Il n'est pas nécessaire de retourner à l'atelier pour mesurer les longueurs initiale et finale l_0 et l . En fait seul le rapport $\frac{l}{l_0}$ est important pour calculer le taux de déformation réel

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}. \quad (4)$$

et on peut tirer la valeur de ce rapport de la mesure du taux de déformation nominal :

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \implies \frac{l}{l_0} = 1 + e.$$

Substituant le rapport $\frac{l}{l_0}$ par sa valeur en fonction de e qu'on vient de trouver, on obtient une règle de transformation des taux nominaux en taux réels :

$$\varepsilon = \ln(1 + e). \quad (5)$$

Dans notre cas, on aura que

$$\varepsilon = \ln(1 + 0.5) = \ln 1.5 \simeq 0.4054.$$

- b) Si e est petit, alors on peut utiliser le développement de Taylor du logarithme autour de 1 :

$$\ln(1 + x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

pour évaluer la second membre de la règle de transformation (5), cela donne :

$$\varepsilon \simeq e - \frac{1}{2}e^2 \simeq e.$$

Dans le cas où $e = 0.05$, on a vérifié que $\varepsilon = \ln(1 + e) = \ln 1.05 \simeq 0.0488 \simeq 0.05$. Il faut toutefois savoir que e sur-estime **toujours** ε :

$$e \geq \varepsilon. \quad (6)$$

Cette inégalité est simple à prouver :

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\int_{l_0}^l dl'}{l_0} = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l_0} \underset{l' > l_0}{\geq} \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln \frac{l}{l_0} = \varepsilon.$$

Remplacer ε par e dans les lois de Hooke/Ludwik conduit donc à des sur-estimations parfois **dramatiques** des contraintes nécessaires à mener les déformations à bien.

On conclut en soulignant que l'intérêt essentiel de l'utilisation de e plutôt que ε est calculatoire. On obtient e sur la base d'une simple division :

$$e = \frac{l - l_0}{l_0},$$

alors que pour obtenir $\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$ il faut en plus extraire un logarithme.

Exercice 2

a) Les taux de déformations nominaux de la première barre, mesurés depuis son état sans contraintes, sont respectivement

$$e_1 = \frac{\ell' - \ell_0}{\ell_0}$$

lorsqu'elle arrive à l'état de précontrainte et

$$e = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

lorsqu'elle atteint son état final (cf. Fig. 2). De son côté, le taux déformations nominal de la seconde barre dans son état final est simplement

$$e_2 = \frac{\ell - \ell'}{\ell'}.$$

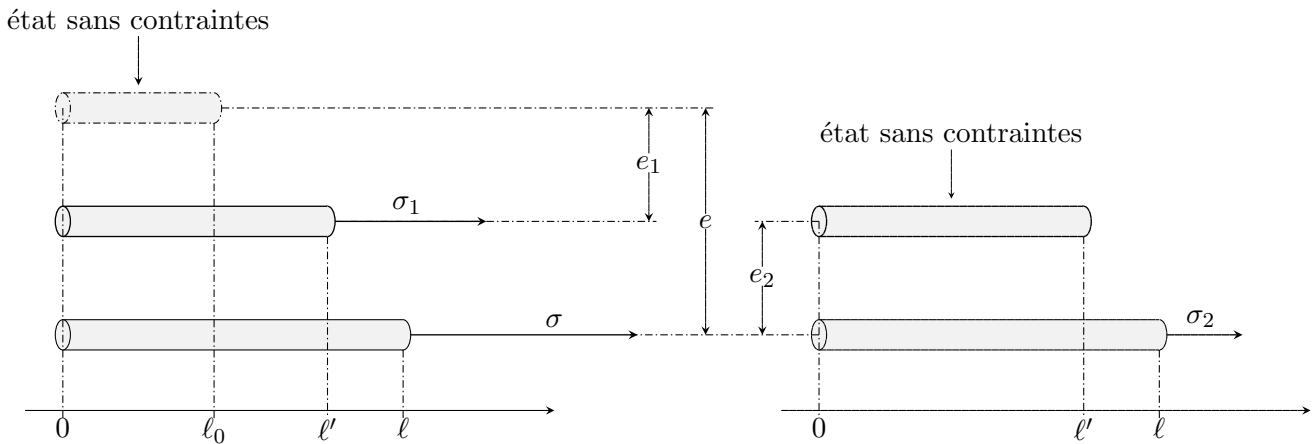


FIGURE 2 – L'expérience des deux barres : une barre précontrainte, une barre non-précontrainte

Sous l'hypothèse que les contraintes sont proportionnelles à ces taux, on trouve que

$$\sigma_1 = Ee_1 = E\frac{\ell' - \ell_0}{\ell_0} \quad \text{et que} \quad \sigma = Ee = E\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

donc

$$\sigma - \sigma_1 = E\left(\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} - \frac{\ell' - \ell_0}{\ell_0}\right) = E\frac{\ell - \ell_0 - \ell' + \ell_0}{\ell_0} = E\frac{\ell - \ell'}{\ell_0}. \quad (1)$$

On trouve aussi que

$$\sigma_2 = Ee_2 = E\frac{\ell - \ell'}{\ell'}. \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) permettent de comparer les accroissements de contrainte $\sigma - \sigma_1$ et σ_2 nécessaire pour appliquer la déformation finale. On obtient que

$$\sigma - \sigma_1 = \frac{\ell'}{\ell_0}\sigma_2 \quad (3)$$

et on peut répondre aux questions qui nous étaient posées :

- 1) Puisque $\ell' \neq \ell_0$, la relation (3) implique que l'une des barres est plus facile à déformer que l'autre.
- 2) Comme $\ell' > \ell_0$, la relation (3) indique aussi que c'est la barre précontrainte qui est la plus **difficile** à déformer¹ :

$$\sigma - \sigma_1 > \sigma_2. \quad (4)$$

- 3) Hooke a observé que, lors de déformations réversibles (élastiques), la précontrainte n'affecte pas la déformabilité. La relation (4) est donc **absurde** et l'hypothèse de proportionnalité entre contrainte réelle et taux de déformation nominal qui en est la cause doit être **rejetée**.

- 4) Au point b) ci-dessous, nous vérifierons que la loi établie au cours disant que la contrainte réelle dépend **linéairement** du taux de déformation **réel** et pas du taux nominal :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5)$$

prédit bien l'observation de Hooke, à savoir que la précontrainte ne modifie pas la déformabilité d'une pièce tant qu'on reste dans le domaine élastique.

Remarque.

Comme $\varepsilon = \ln(1 + e)$ (cf. cours), la relation entre la contrainte réelle et le taux de déformation nominal est en fait logarithmique :

$$\sigma = E \ln(1 + e).$$

Ce n'est que dans la mesure où e est petit qu'on peut écrire

$$\sigma \approx Ee \quad (\text{Hooke linéarisé}).$$

- b) Les taux de déformations réels de la première barre, mesurés toujours depuis son état sans contraintes, valent

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{\ell'}{\ell_0}$$

jusqu'à l'état de précontrainte et

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0}$$

dans l'état final (cf. Fig. 2). Le taux déformations réel de la seconde barre dans son état final est

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{\ell}{\ell'}.$$

L'application de la loi de Hooke (5) donne

$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = E \ln \frac{\ell}{\ell'}. \quad (6)$$

en lieu et place de la formule (2) obtenue sous l'hypothèse de proportionnalité entre contrainte et taux nominal. La loi (5) permet aussi d'évaluer les contraintes σ_1 et σ :

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = E \ln \frac{\ell'}{\ell_0} \quad \text{et} \quad \sigma = E\varepsilon = E \ln \frac{\ell}{\ell_0}$$

1. La relation (4) n'est même pas un reflet de ce qui pourrait se passer en plasticité. En plasticité, en effet, c'est la barre précontrainte qui est la plus facile à déformer et pas l'inverse (cf. exercice 4).

donc

$$\sigma - \sigma_1 = E \left[\ln \frac{\ell}{\ell_0} - \ln \frac{\ell'}{\ell_0} \right]$$

Si on utilise qu'une différence de logarithmes correspond au logarithme du quotient, on trouve que

$$\sigma - \sigma_1 = E \left[\ln \frac{\ell \ell_0}{\ell_0 \ell'} \right] = E \ln \frac{\ell}{\ell'} \quad (7)$$

à la place de la formule (1). La conclusion qu'on tire de (6) et (7) est l'égalité des contraintes à ajouter :

$$\sigma - \sigma_1 = \sigma_2.$$

Elle correspond à l'observation faite par Hooke sur le maintien des propriétés de déformabilité indépendamment de la précontrainte dès lors qu'on se trouve dans un contexte de réversibilité.

Exercice 3

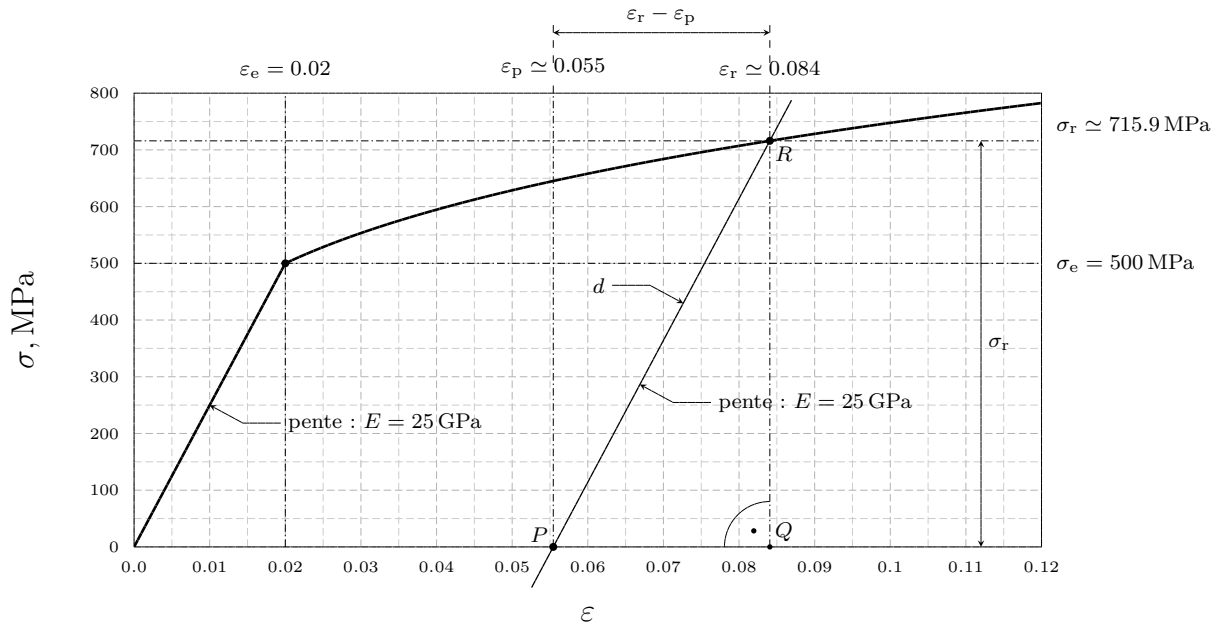


FIGURE 2 – Courbe de traction réelle du matériau \mathcal{M}

- a) Le taux de déformation réel en limite élastique ε_e et la limite élastique σ_e sont les coordonnées horizontale et, respectivement, verticale du point où la courbe de traction réelle passe d'un comportement linéaire (élasticité) à un comportement sous-linéaire (plasticité). On lit sur la Fig. 2 que

$$\varepsilon_e \approx 0.02 \quad \text{et que} \quad \sigma_e \approx 500 \text{ MPa.}$$

Le module d'Young est la pente de la partie linéaire de la courbe de traction réelle :

$$E = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \approx \frac{500}{0.02} = 25'000 \text{ MPa} = 25 \text{ GPa.}$$

- b) L'analyse de l'état de déformation permanente et de l'état de relaxation peut se mener graphiquement.

- 1) Le taux de déformation réel ε_p qu'on atteint en amenant à la longueur $\ell = 1'057 \text{ mm}$ une barre de longueur initiale $\ell = 1'000 \text{ mm}$ est

$$\varepsilon_p = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln \frac{1'057}{1'000} \approx 0.055$$

- 2) Pour déterminer l'état de relaxation, on place le point P de coordonnées $(\varepsilon_p \approx 0.055, 0.0)$ dans le graphique de la Fig. 2. Par ce point, on mène une parallèle d à la droite de montée élastique. Le point R en lequel cette droite coupe la courbe de traction réelle est le point de **relaxation**. Ses coordonnées sont $(\varepsilon_r, \sigma_r)$. On mesure sur le dessin que

$$\varepsilon_r \approx 0.084 \quad \text{et que} \quad \sigma_r \approx 716 \text{ MPa.}$$

- 3) Pour établir l'équation de la déformation permanente, on considère le triangle RQP qui est rectangle en Q (cf. Fig. 2) et on écrit que la pente de son hypoténuse vaut E :

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PQ}} = E. \quad (1)$$

On utilise ensuite que la longueur \overline{PQ} du segment PQ est égale à la différence entre le taux de déformation permanent et le taux de déformation en relaxation :

$$\overline{PQ} = \varepsilon_r - \varepsilon_p. \quad (2)$$

La longueur \overline{RQ} du segment RQ correspond elle à la contrainte σ_r atteinte en relaxation. Si on admet que le matériau \mathcal{M} suit une loi de Ludwik pour un coefficient d'écroutissage n , on peut écrire que

$$\sigma_r = K\varepsilon_r^n$$

et donc que

$$\overline{RQ} = K\varepsilon_r^n. \quad (3)$$

Substituant les valeurs (2) et (3) des longueurs des côtés PQ et RQ dans (1), on obtient que

$$\frac{K\varepsilon_r^n}{\varepsilon_r - \varepsilon_p} = E.$$

Si on divise cette relation par K et qu'on la multiplie par $\varepsilon_r - \varepsilon_p$, on trouve que

$$\varepsilon_r^n = \frac{E}{K}(\varepsilon_r - \varepsilon_p). \quad (4)$$

Le rapport entre K et E est lié au taux de déformation réel en limite élastique ε_e . Au cours, on a vu en effet que

$$\frac{E}{K} = \frac{E}{E\varepsilon_e^{1-n}} = \frac{1}{\varepsilon_e^{1-n}} = \frac{\varepsilon_e^n}{\varepsilon_e}.$$

Avec cette information, (4) devient :

$$\varepsilon_r^n = \frac{\varepsilon_e^n}{\varepsilon_e}(\varepsilon_r - \varepsilon_p).$$

Si on divise cette relation par ε_e^n on trouve que

$$\frac{\varepsilon_r^n}{\varepsilon_e^n} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e}$$

soit

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n \quad (5)$$

si on réarrange les termes.

Exercice 4

- a) Le module d'érouissage K est lié au taux de déformation réel par la formule de compatibilité entre loi de Hooke et de Ludwik :

$$K = E\varepsilon_e^{1-n} \simeq 300 \times (0.01)^{1-0.26} \simeq 9.934 \text{ GPa.} \quad (1)$$

- b) Passons maintenant au calcul des contraintes :

- i) Le taux de déformation réel ε_1 qui est atteint par la première barre lorsque sa longueur est passée à la valeur $\ell' = 2000$ mm vaut

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{\ell'}{\ell_0} = \ln \frac{2000}{1975} \simeq 0.0126. \quad (2)$$

Comme cette valeur dépasse le taux de déformation réel en limite élastique $\varepsilon_e = 0.01$, il faut appliquer la loi de Ludwik pour évaluer la précontrainte σ_1 :

$$\sigma_1 = K\varepsilon_1^n \simeq 9.934 \times 0.0126^{0.26} \simeq 3.186 \text{ GPa.} \quad (3)$$

- ii) Le taux de déformation réel final ε de la première barre se calcule de la façon suivante :

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln \frac{2030}{1975} \simeq 0.0275. \quad (4)$$

Ce taux est évidemment supérieur au taux ε_1 atteint en fin de première étape. Par voie de conséquence, il est aussi supérieur au taux de déformation réel en limite élastique $\varepsilon_e = 0.01$ et c'est à nouveau la loi de Ludwik qui donne la valeur de la contrainte finale :

$$\sigma = K\varepsilon \simeq 9.934 \times 0.0275^{0.26} \simeq 3.902 \text{ GPa.} \quad (5)$$

- iii) Le taux de déformation ε_2 appliqué à la seconde barre qui passe simplement de la longueur non déformée $\ell' = 2000$ mm à la longueur finale $\ell = 2030$ mm vaut

$$\varepsilon_2 = \ln \frac{\ell}{\ell'} = \ln \frac{2030}{2000} \simeq 0.0149. \quad (6)$$

Puisque $\varepsilon_2 > \varepsilon_e = 0.01$, on est encore une fois dans le domaine plastique et il faut appliquer la loi de Ludwik pour évaluer la contrainte σ_2 nécessaire à cette opération. On trouve :

$$\sigma_2 = K\varepsilon_2^n \simeq 9.934 \times 0.0149^{0.26} \simeq 3.320 \text{ GPa.} \quad (7)$$

Compte tenu de (3) et (5), l'incrément de contrainte $\sigma - \sigma_1$ appliquée à la première barre lors de l'étirement final vaut :

$$\sigma - \sigma_1 = 3.902 - 3.186 = 0.716 \text{ GPa} \quad (8)$$

On observe que cette quantité est largement inférieure à la contrainte σ_2 (7) nécessaire à effectuer la même déformation mais sur la barre précontrainte. Cette dernière est donc plus facile à travailler. Cela s'explique par le fait que c'est dans sa partie élastique que l'étirage nécessite le plus de force et, pour la première barre, l'essentiel de cet effort aura déjà été consenti lors de la mise sous précontrainte.

- c) Si le matériau est presque plastiquement idéal, i.e si son coefficient d'écroutissement est quasiment nul :

$$n \approx 0$$

alors la loi de Luwik devient :

$$\sigma = K\varepsilon^n \approx K\varepsilon^0 = K, \varepsilon > \varepsilon_e \quad (9)$$

car n'importe quel nombre positif mis à la puissance 0 donne 1. L'équation (9) signifie que la contrainte σ est pratiquement une constante dans toute la zone plastique. Cette constante doit évidemment correspondre à la limite élastique réel du matériau σ_e , autrement dit : $K = \sigma_e$ et

$$\sigma \approx \sigma_e, \varepsilon > \varepsilon_e$$

Dans ces conditions, puisque toutes les déformations considérées ici sont plastiques, la précontrainte σ_1 de la première barre et les contraintes finales σ et σ_2 sont toutes égales environ à σ_e :

$$\sigma \approx \sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma_e.$$

Il s'ensuit que l'incrément de contrainte $\sigma - \sigma_1$ nécessaire à effectuer l'allongement final sur la première barre est presque nul :

$$\sigma - \sigma_1 \approx \sigma_e - \sigma_e = 0.$$

Dans le cas d'un matériau plastiquement idéal, une barre précontrainte en plasticité est donc **infiniment** plus facile à déformer qu'une barre relâchée.

- d) La force développée par la machine en fin de traitement de la première barre s'obtient en multipliant l'aire S de sa section droite par la contrainte σ (5) :

$$F = \sigma S \quad (10)$$

Or la surface S est inconnue. En cours de traction, elle diminue à partir de sa valeur initiale

$$S_0 = \frac{\pi}{4} d_0^2 \simeq \frac{3.14}{4} \times 50^2 \simeq 1963 \text{ mm}^2.$$

Si le corps est incompressible, la diminution de S peut être anticipée en appliquant l'équation de conservation du volume :

$$S_0 \ell_0 = S \ell$$

où $\ell_0 = 1975$ mm désigne la longueur initiale de la barre et $\ell = 2030$ mm sa longueur finale. Si on résoud pour S il vient :

$$S = \frac{S_0 \ell_0}{\ell} \simeq \frac{1963 \times 1975}{2030} \simeq 1909 \text{ mm}^2.$$

Substituant cette valeur et celle de la contrainte σ (cf.(5)) dans (10), on trouve la force :

$$F \simeq 3.902 \times 1'909 = 7'452 \text{ kN} = 7.452 \text{ MN}. \quad (11)$$