

Série 1.

Exercice 1

Votre chef d'atelier a l'habitude de caractériser l'état de déformation d'une barre étirée en mesurant la quantité :

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (\text{taux de déformation nominal}) \quad (1)$$

où l_0 est la longueur initiale de la barre et l sa longueur à la fin de l'étirage lorsqu'est appliquée une certaine force F . Ce taux de déformation porte le nom de taux de déformation nominal (*engineering strain* en anglais). Dans la foulée, le chef d'atelier utilise aussi une loi de Hooke approchée qui dit que la contrainte réelle $\sigma = \frac{F}{S}$ est proportionnelle au taux nominal (et pas au taux réel ε comme il se devrait). Cette loi s'appelle la loi de Hooke linéarisée et s'écrit :

$$\sigma = Ee \quad (\text{Loi de Hooke linéarisée}) \quad (2)$$

Il effectue une traction sur une barre faite dans un matériau de module d'élasticité $E = 50 \text{ GPa}$ et revient vers vous pour vous informer que le taux de déformation qu'il a mesuré est

$$e = 0.005. \quad (3)$$

- a) Selon votre chef d'atelier, quelle sera la contrainte réelle σ que la machine de traction est censée développer en fin d'expérience ?
- b) Quelle est la valeur **exacte** de cette contrainte, c'est à dire celle qu'on obtient en utilisant la **vraie** loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{Loi de Hooke}) \quad (4)$$

où ε est le taux de déformation réel ?

- c) Que concluez-vous, est-ce que le niveau d'erreur est acceptable ?
- d) Refaites tout le raisonnement ci-dessus dans le cas où la déformation effectuée est une **grande** déformation qui correspond au taux nominal

$$e = 0.75. \quad (5)$$

La stratégie de votre chef d'atelier se justifie-t-elle encore ?

Exercice 2

On considère une barre de longueur $\ell_0 = 1'000 \text{ mm}$ faite dans un matériau recuit $\mathcal{M}$ dont la courbe de traction réelle est donnée à la Fig. 1.

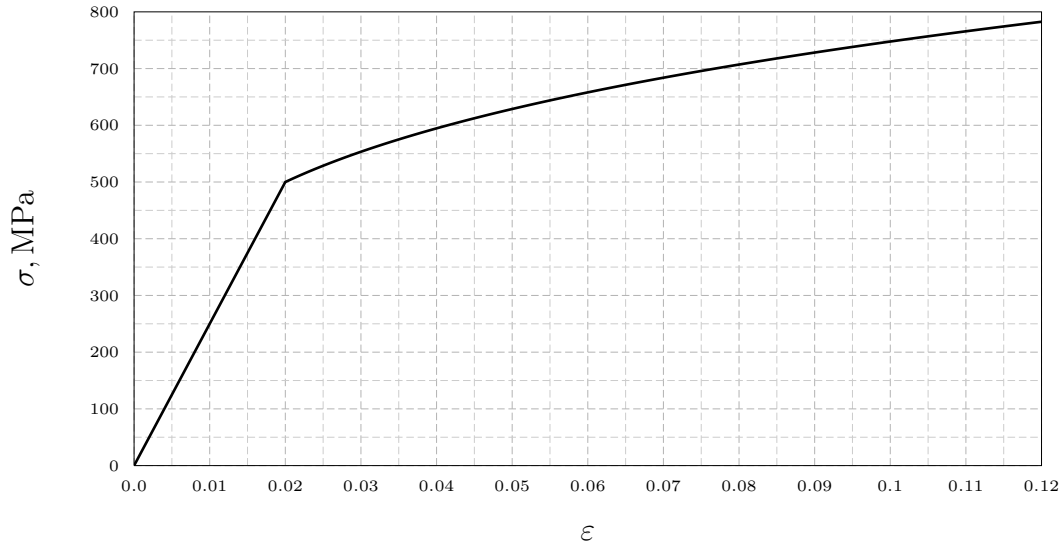


FIGURE 1 – Courbe de traction réelle du matériau $\mathcal{M}$

- a) Déterminez graphiquement le taux de déformation réel en limite élastique ε_e , la limite élastique σ_e et le module d'Young E du matériau $\mathcal{M}$.
- b) Vous aimeriez déformer cette barre de façon permanente jusqu'à une longueur $\ell = 1'057$ mm.
 - 1) Calculer le taux de déformation réel ε_p que vous devez atteindre de façon permanente.
 - 2) Déterminez graphiquement le taux de déformation réel ε_r que vous devez atteindre sur la machine de traction avant d'entamer la relaxation. Déterminez aussi graphiquement la valeur σ_r de la contrainte réelle que la machine de traction induit dans la barre à ce moment-là.
 - 3) Si, lors de son écrouissage, le matériau $\mathcal{M}$ suit une loi de Ludwik de coefficient n , justifiez géométriquement que les taux de déformation réels permanent ε_p et en relaxation ε_r sont liés par l'équation dite de la **déformation permanente** :

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} \right)^n$$

où ε_e désigne le taux de déformation réel en limite élastique du matériau (cf. Fig. 1).

Exercice 3

On considère deux barres de même longueur $\ell' = 2000$ mm et faites dans un même matériau qui suit une loi de Ludwik en plasticité et dont les caractéristiques sont données à la Tab. 1

TABLE 1 – Propriétés mécaniques de l'acier considéré		
tx. de déf. réel en lim. élas.	module d'Young	coeff. d'écr.
$\varepsilon_e = 0.01$ -	$E = 300$ GPa	$n = 0.26$ -

La première barre est précontrainte (contrainte de traction σ_1) parce qu'elle a été obtenue par étirage à partir d'une longueur initiale $\ell_0 = 1975$ mm, la seconde n'est pas précontrainte (cf. Fig : 1).

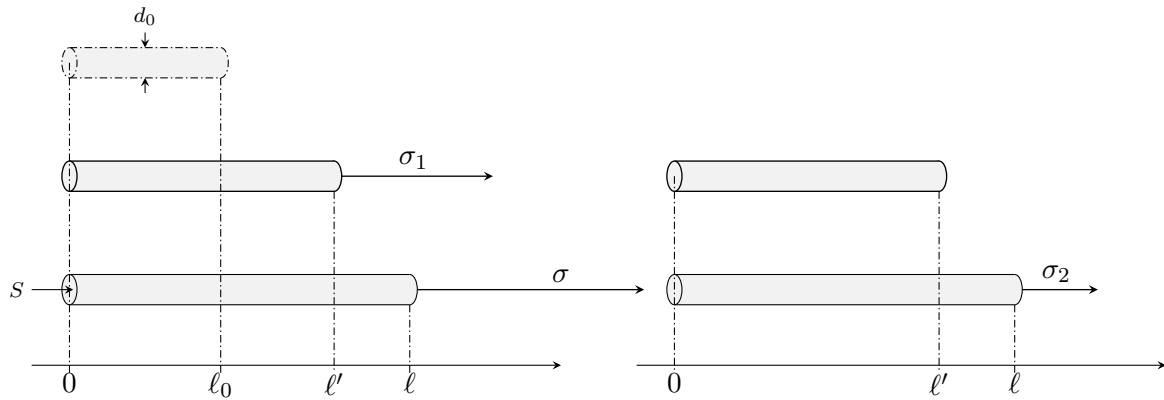


FIGURE 1 – L'expérience des deux barres : une barre précontrainte, une barre non-précontrainte

Les deux barres sont ensuite étirées de la longueur ℓ' et amenées chacune à une longueur finale $\ell = 2030$ mm.

- Tenez compte des données numériques de la Tab. 1 pour calculer le module d'écouissage K de la matière.
- Utilisez cette information pour calculer
 - la valeur de la précontrainte σ_1 ,
 - la valeur finale σ de la contrainte appliquée à la première barre,
 - la valeur finale σ_2 de la contrainte appliquée à la seconde barre, celle qui n'est pas précontrainte.

Comparez σ_2 à l'incrément de contrainte $\sigma - \sigma_1$ appliquée à la première barre lors de l'étirement final, de la longueur ℓ' à la longueur ℓ (cf. Fig : 1). Que constatez-vous ?

- Que se passerait-il si le coefficient d'écrouissage n du matériau était quasiment nul ?
- A l'inverse que se passerait-il si le taux de déformation réel en limite élastique ε_e était si grand par exemple dix fois plus grand :

$$\varepsilon_e = 0.1, \quad (1)$$

de sorte que toutes les déformations illustrées à la Fig. 1 restent dans le domaine **élastique** ?

- Une machine de traction n'est généralement pas pilotée en fonction de la contrainte réelle qu'elle applique mais en fonction de la force de traction F qu'elle développe. Pouvez-vous calculer le réglage de cette force en fin d'opération pour la première barre sachant que son diamètre initial, avant l'opération de précontrainte, valait $d_0 = 50$ mm (cf. Fig : 1). S'il vous manque une information partez du principe que l'alliage est incompressible.