Procédés de Fabrication I - IGI
Chapitre 2. Propriétés Mécaniques des Matériaux

24 septembre 2026

Programme de la première partie

1. Introduction
2. Description de l'expérience de traction uniaxiale
3. La contrainte en plasticité, Loi de Ludwik et courbe de traction réelle
4. Décharge et relaxation

2.1.1 Généralités

- *Dans la plupart des procédés, la mise en forme de la matière première est basée sur les déformations plastiques. C'est le cas :*
  - *du formage des métaux : laminage, forgeage, extrusion, étirage,*
  - *du formage des feuilles : pliage, emboutissage, découpage ,*
  - *des procédés de coupe (fraisage, perçage, décolletage),*
  - *. . .*
- *La planification puis l'optimisation des procédés de production cités plus haut est donc essentiellement conditionnée par les **propriétés mécaniques (élastiques et surtout plastiques)** du matériau à usiner.*
- *Il existe d'autres procédés comme la fonderie ou l'injection dont les performances dépendent plutôt des **propriétés thermiques** du matériau à mettre en forme. Ce sujet sera traité dans le chapitre suivant.*

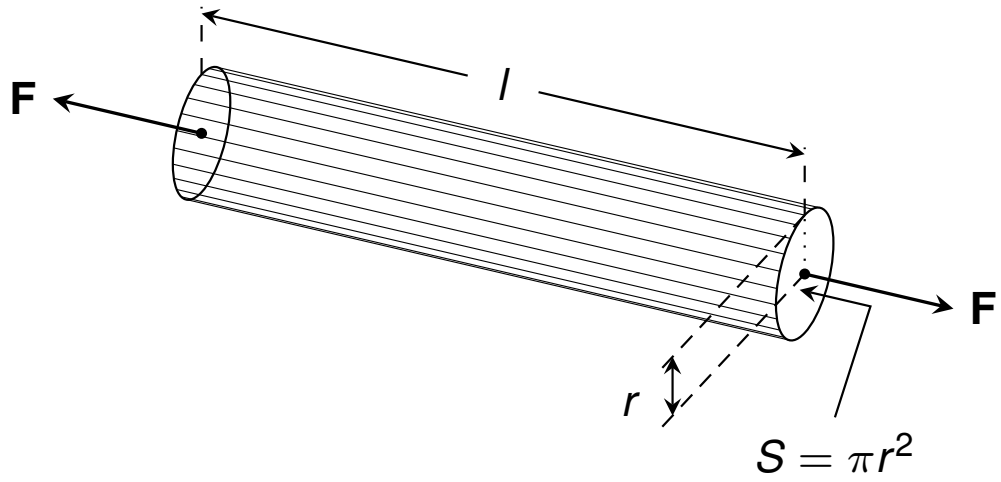
2.1.2 Objectifs du chapitre

- *Il s'agit de définir, d'illustrer et de comprendre le lien qu'ont entre elles les principales propriétés élasto-plastiques de la matière :*

Nom	***Symbole***	***Unité***
Le module d'élasticité	E	$[GPa]$
Le coefficient de Poisson	ν	$[-]$
Le coefficient d'écrouissage	n	$[-]$
Le module d'écrouissage	K	$[MPa]$
La limite élastique	R_e	$[MPa]$
La résistance à la traction	R_m	$[MPa]$
Le taux de déformation réel à la rupture	ε_{ult}	$[-]$
La dureté	HB, HV, HK	$[kg/mm^2]$
. . .	. . .	. . .

(cf. Annexe 1)

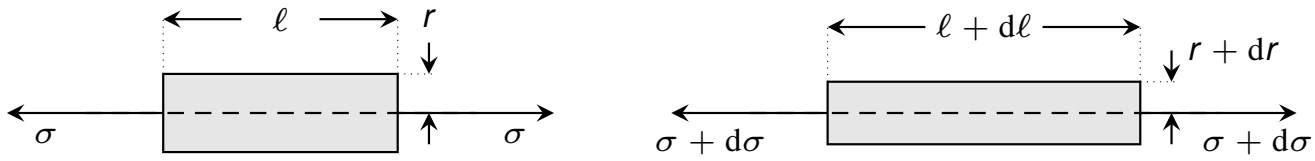
2.2.1 Expérience de traction - contrainte réelle



- *Dans une expérience de traction on allonge un échantillon de matière en lui appliquant une force F croissante.*
- *La force n'est pas une bonne mesure de la façon avec laquelle on sollicite l'échantillon. Le rapport entre la force et la section courante en donne une meilleure idée.*
- *Ce rapport est noté σ et appelé contrainte de traction* ***réelle***

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \textit{unité :MPa} \tag{1}$$

2.2.2 Lois infinitésimales



- *Si la contrainte de traction σ augmente d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}\sigma$ la longueur ℓ et le rayon r de l'échantillon varient de $\mathrm{d}\ell$ et respectivement $\mathrm{d}r$.*
- *Hooke et Poisson ont observé que tant que les déformations restent* ***élastiques****, les variations relatives $\mathrm{d}\ell/\ell$ et $\mathrm{d}r/r$ sont en proportion de $\mathrm{d}\sigma$:*

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\ell} = \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma \qquad \textbf{\textit{(Loi de Hooke infinitésimale)}} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{1}{E'}\mathrm{d}\sigma \qquad \textbf{\textit{(Loi de Hooke-Poisson infinitésimale)}}. \tag{3}$$

où $E, E' > 0$ sont les modules d'Young et de Young-Poisson. Le signe moins dans la seconde relation dit que le rayon diminue si la traction augmente.

2.2.3 Module d'Young et coefficient de Poisson

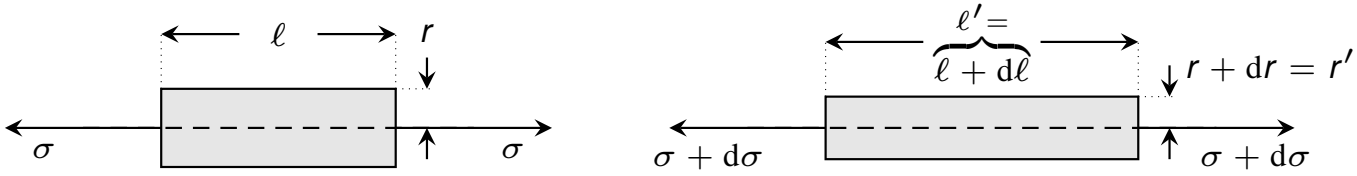
- *Le module d'Young est une caractéristique fondamentale des propriétés élastiques du matériau dont est fait l'échantillon.*
- *Le module d'Young-Poisson E' est aussi une caractéristique de l'échantillon, mais elle n'est pas très célèbre. La caractéristique qui est devenue fameuse est plutôt le rapport entre E et E'. Ce rapport est noté ν et appelé* ***coefficient de Poisson*** *:*

$$\nu = \frac{E}{E'} \Longrightarrow E' = \frac{E}{\nu}.$$

- *En éliminant le module d'Young-Poisson E' au profit du coefficient de Poisson, les accroissements relatifs de longueur et de rayon suscités par une augmentation élastique de contrainte de traction valent :*

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\ell} = \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma \quad \textit{et} \quad \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma. \tag{4}$$

2.2.4 Episode microscopique



- *L'augmentation* $\mathrm{d}\sigma$ *(très petite) de contrainte fait passer la longueur et le rayon de l'échantillon des valeurs* ℓ, r *aux valeurs* ℓ', r' *:*

$$\ell' = \ell + \mathrm{d}\ell = \ell\left(1 + \frac{\mathrm{d}\ell}{\ell}\right) = \ell\left(1 + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma\right)$$

$$r' = r + \mathrm{d}r = r\left(1 + \frac{\mathrm{d}r}{r}\right) = r\left(1 - \frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma\right)$$

- *L'effet d'une très petite augmentation de contrainte sur les longueurs et les rayons est donc multiplicatif : la valeur après est la valeur avant* ***fois*** *un certain facteur. Un facteur d'amplification* > 1 *pour la longueur et de réduction* < 1*, pour le rayon :*

$$1 + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma \quad \textit{(pr. la longu.)} \quad 1 - \frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma \quad \textit{(pr. le rayon)}$$

Bien sûr, cela n'est vrai que si les déformations qu'on considère sont ***élastiques !***

2.2.5 Episode microscopique

- *Les lois **multiplicatives** : ce qui vient après est ce qu'il y a avant fois quelque chose :*

$$\ell' = \ell\left(1 + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma\right) \qquad \textit{et} \qquad r' = r\left(1 - \frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma\right)$$

*ne sont pas si pratiques que cela. Des **lois additives** : ce qui vient après est ce qu'il y a avant **plus** quelque chose seraient plus simples à utiliser.*

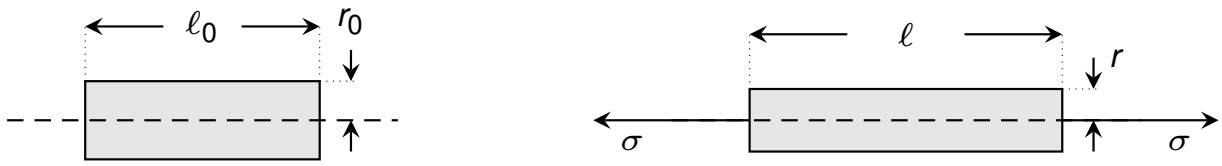
- *Grâce au logarithme, on transforme une loi multiplicative en une loi additive :*

$$\ln \ell' = \ln \ell\left(1 + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma\right) = \ln \ell + \ln\left(1 + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma\right) = \ln \ell + \frac{1}{E}\mathrm{d}\sigma$$

- *Cette loi est bien **additive** : on passe de la valeur avant à la valeur après en ajoutant un terme. Comme $\mathrm{d}\sigma$ est très petit (devant E) on peut simplifier le terme ajouté. Une formule dit en effet que $\ln(1+x) \approx x$ si $x \ll 1$. En transformant de la même manière la loi de passage de r à r′, on trouve :*

$$\ln r' = \ln r\left(1 - \frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma\right) = \ln r + \ln\left(1 - \frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma\right) = \ln r - \frac{\nu}{E}\mathrm{d}\sigma$$

2.2.6 Expérience macroscopique



- *La mise en traction macroscopique (σ) d'un échantillon peut être décomposé en une succession de n étapes où la contraite est augmentée de σ/n à chaque fois.*
- *Si n est très très grand, l'accroissement de contrainte σ/n est $\simeq$ microscopique et, s'il est élastique, son effet sur les logarithmes de la longueur et du rayon est additif. Au cours des épisodes, ces logarithmes évoluent depuis les valeurs $\ln \ell_0$ et $\ln r_0$ selon :*

$$\ln \ell_0 \to \ln \ell_0 + \frac{1}{E}\frac{\sigma}{n} \to \ln \ell_0 + \frac{2}{E}\frac{\sigma}{n} \to \ln \ell_0 + \frac{3}{E}\frac{\sigma}{n} \ldots$$

$$\ln r_0 \to \ln r_0 - \frac{\nu}{E}\frac{\sigma}{n} \to \ln r_0 - \frac{2\nu}{E}\frac{\sigma}{n} \to \ln r_0 - \frac{3\nu}{E}\frac{\sigma}{n} \ldots$$

- *Les logarithmes de la longueur et du rayon finaux au terme des n étapes, seront donc*

$$\ln \ell = \ln \ell_0 + \frac{n}{E}\frac{\sigma}{n} = \ln \ell_0 + \frac{\sigma}{E} \quad \textit{et} \quad \ln r = \ln r_0 - \frac{n\nu}{E}\frac{\sigma}{n} = \ln r_0 - \nu\frac{\sigma}{E}$$

2.2.7 Expérience macroscopique (fin)

- *Les équations qu'on vient d'obtenir sont :*

$$\ln \ell = \ln \ell_0 + \frac{1}{E}\sigma \tag{5}$$

$$\ln r = \ln r_0 - \frac{\nu}{E}\sigma \tag{6}$$

- *On utilise l'équation (5) pour exprimer σ :*

$$\sigma = E(\ln \ell - \ln \ell_0) = E \ln \frac{\ell}{\ell_0}. \tag{7}$$

- *On peut ensuite mettre en relation les variations de rayon avec celles de longueur en substituant la valeur (7) de σ dans l'équation (6) :*

$$\ln r - \ln r_0 = -\frac{\nu}{E} E \ln \frac{\ell}{\ell_0} \Longrightarrow \ln \frac{r}{r_0} = -\frac{\nu}{E} E \ln \frac{\ell}{\ell_0} = -\nu \ln \frac{\ell}{\ell_0}. \tag{8}$$

2.2.8 Lois de Hooke et de Poisson

- *Les équations (7) et (8) font intervenir le logarithme du rapport entre les longueurs finale et initiale. Cette quantité est une mesure de la déformation. On lui donne un nom,* ***taux de déformation réel****, et on la note* ε *:*

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0}. \tag{9}$$

- *Avec cette notation la formule (7) devient donc*

$$\sigma = E\varepsilon, \quad si\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_e \qquad \textbf{\textit{(Loi de Hooke)}} \tag{10}$$

et la formule (8) :

$$\ln \frac{r}{r_0} = -\nu\varepsilon$$

soit, en résolvant pour r/r_0 *:*

$$\frac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon}, si\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_e. \qquad \textbf{\textit{(Loi de Poisson)}} \tag{11}$$

2.2.9 Taux de déformation réel en limite élastique

- *On prendra note que les lois de Hooke (10) et de Poisson (11) ne sont valables que si*

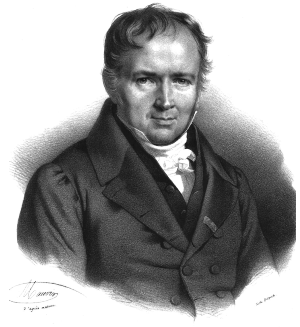
$$0 < \varepsilon < \varepsilon_e$$

*où ε_e est le taux réel en deça duquel les déformations sont **élastiques** et au delà duquel elles sont **plastiques**. cela veut dire que si $\varepsilon < \varepsilon_e$ alors l'échantillon reprend sa forme initiale (longueur ℓ_0, rayon r_0) si on relaxe la force. En revanche, si $\varepsilon > \varepsilon_e$ alors l'échantillon va garder une déformation **permanente** après la relaxation.*

- *On appelle ε_e taux de déformation réel en limite élastique. Cette quantité est une caractéristique du matériau dont est fait l'échantillon mais pas seulement. Elle dépend de l'historique de déformation et peut être modifiée mécaniquement, c'est le phénomène d'écrouissage dont nous parlerons plus tard.*



Thomas Young, 1773-1829



Siméon Poisson, 1781-1840



Robert Hooke, 1635-1703

2.2.10 Lois de Poisson - section et volume

- *La loi de Poisson (11) donne le rapport des rayons en fonction du taux de déformation réel :*

$$\frac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon},\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e$$

- *Mais si le rapport des rayons est connu, celui des sections est facile à calculer et, comme le rapport des longueurs est lié de façon simple à ε : $l/l_0 = \mathbf{e}^{\varepsilon}$, on peut trouver le rapport des volumes :*

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon},\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e, \tag{12}$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{S}{S_0}\frac{l}{l_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon},\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e. \tag{13}$$

- *C'est en fait les trois relations (11)-(13) ensemble qu'on appelle lois de Poisson. On soulignera encore que leur domaine de validité est celui de l'élasticité ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e$).*
- *Puisqu'elles permettent une mise à jour de toutes les caractéristiques géométriques de la pièce en fonction du taux de déformation réel ε :*

$$r = r_0\mathbf{e}^{-\nu\varepsilon},\ S = S_0\mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon} \quad et \quad V = V_0\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon}$$

*ces relations confirment, que ε est une mesure **efficace** de la déformation.*

2.2.11 Contrainte sur le coefficient de Poisson

- *Lors de l'expérience de traction, longueur et volume augmentent simultanément. Cette remarque contraint les valeurs possibles du coefficient de Poisson ν intervenant dans la loi (13) :*

$$\frac{V}{V_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon}.$$

Il faut que $V/V_0 > 1$ si $\varepsilon > 0$ donc que

$$\nu \leq 0.5 \tag{14}$$

- *Si $\nu = \frac{1}{2}$, le volume reste cst. ($V = V_0$), l'échantillon est dit **incompressible**.*
- *Notons que ν n'est pas forcément positif. Il existe des (méta-)matériaux à coefficient de Poisson $\nu < 0$ (matériaux auxétique), ceux là augmentent de rayon durant l'expérience de traction (11) :*

$$\frac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon} > 1 \quad si \quad \varepsilon > 0.$$

2.2.12 Une mesure alternative de la déformation

- *Le taux de déformation réel* $\varepsilon = \ln \frac{l}{\ell_0}$ *n'est pas la seule façon de mesurer la déformation. On peut aussi utiliser le taux de déformation nominal que vous connaissez sans doute :*

$$e = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \tag{15}$$

- *Dans le cas des petites déformations, ces deux taux coïncident presque :*

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0} = \ln \frac{\ell_0 + \ell - \ell_0}{\ell_0} = \ln \left(1 + \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}\right) = \ln(1 + e)$$

donc $\varepsilon \approx e$, *si* $e < 0.05$ *car* $\ln(1 + e) \approx e$ *si e est très petit (théorie de Taylor).*

- *Si e est petit on peut donc remplacer la loi de Hooke* $\sigma = E\varepsilon$ *par*

$$\sigma = Ee \quad \textbf{\textit{(loi de Hooke linéarisée)}} \tag{16}$$

Mais cette approximation ne se justifie plus dans le cas des grandes déformations $e \gg 0.05$ *(cf exos).*

(cf. Annexe 2)

2.3.1 Exemple de loi d'écrouissage - Loi de Ludwik

- *La loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ n'est plus valable si ε excède ε_e* ***(plasticité)****.*
- *Dans la zone plastique, c'est une loi appelée* ***loi d'écrouissage*** *qui va donner le rapport entre σ et ε. Pour des raisons thermodynamiques, une loi d'écrouissage doit* ***toujours*** *être croissante :*

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} > 0$$

- *Il existe de nombreux type de lois d'écrouissage qui dépendent du matériau et de son histoire thermomécanique. Mais le comportement plastique de tout une classe de matériaux* ***recuits*** *est bien décrit par une loi d'écrouissage de la forme :*

$$\sigma = K\varepsilon^n, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_\mathrm{e} \quad \textbf{\textit{(Ludwik)}}$$

  où n est le ***coefficient d'écrouissage*** *et K le module d'écrouissage,* ***unité :*** *$[K] = GPa$.*
- *Le module d'écrouissage K est ajustée pour que les lois de Hooke et de Ludwik coïncident en $\varepsilon = \varepsilon_e$:*

$$K = E\varepsilon_e^{1-n}. \tag{17}$$

2.3.2 Bornes pour le coefficient d'écrouissage

- *Pour des raisons thermodynamiques (cf. exercices), on a que*

$$0 < n < 1.$$

- *Le cas limite $n = 0$ correspond à un matériau au comportement **plastique idéal**. Dans ce cas $\sigma = c^{ste}$ au delà de la limite élastique*

$$n_{or} \simeq 0.$$

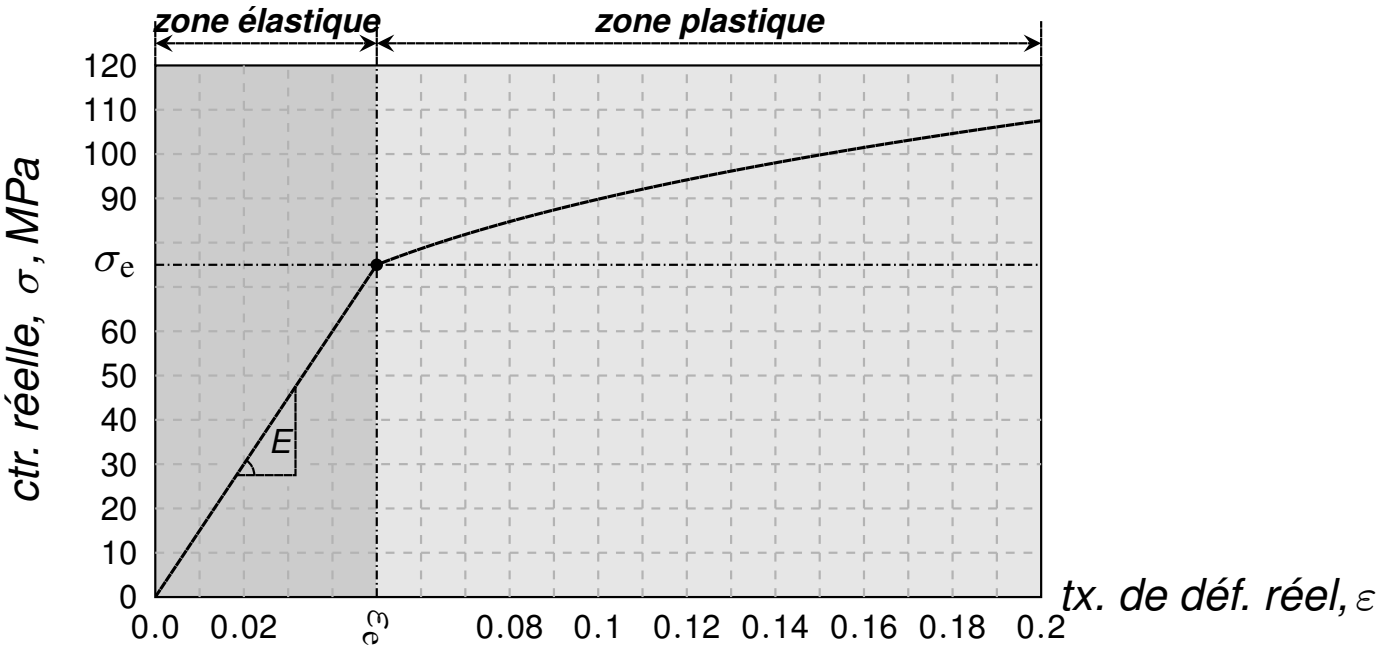
- *Pour les matériaux réels, $n > 0$ et la contrainte σ croît avec ε. Si $n \simeq 1$, plus on le déforme plus le matériau est dur à travailler **(écrouissage par augmentation de la densité de dislocations)***

$$n_{cuivre} \simeq 1.$$

- *Il n'est évidemment **jamais** recommandé d'appliquer les lois d'écrouissage en y remplaçant les taux de déformations réels par les taux nominaux, c'est à dire remplacer la formule $\sigma = K\varepsilon^n$ par la formule $\sigma = Ke^n$.*

(cf. Annexes 6, 24, 7)

2.3.3 Courbe de traction et limite élastique réelle



- *La quantité $\sigma_e = E\varepsilon_e$ est la **limite élastique réelle du matériau**. Si la contrainte de traction appliquée excède cette limite, le matériau subit une déformation permanente. Cet état est celui recherché dans les processus de **formage** (forgeage, laminage, . . .). Les forces mises en jeu par ces procédés amèneront le niveau de contrainte au-delà de la valeur σ_e. Cela justifie l'importance de la partie plastique de la courbe de traction dans ce cours.*

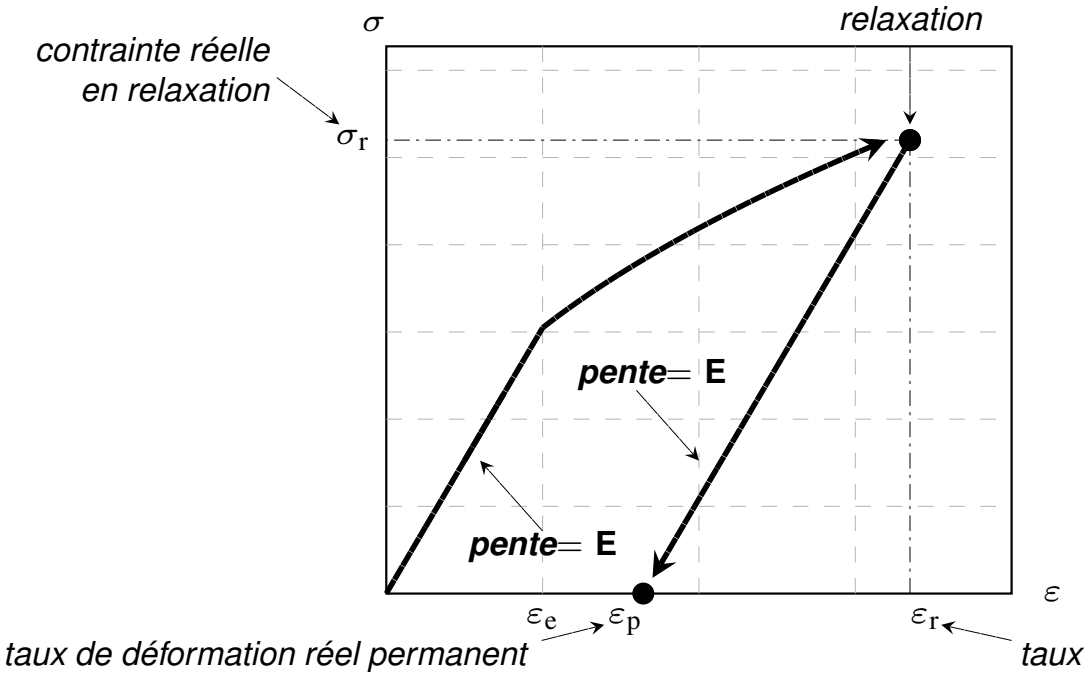
2.3.4 Limite élastique réelle - interprétation

- *La quantité σ_e correspond au niveau de traction uniaxiale à partir duquel les dislocations se mettent à bouger (écoulement du matériau).*
  - *Il faut souligner que seules des contraintes de **cisaillement** peuvent mobiliser des dislocations. Or un état de traction uniaxiale implique que certains plans sont sollicités en cisaillement !*
- *On peut augmenter la limite élastique réelle σ_e (donc la **dureté** du matériau à laquelle elle est liée)*
  - *en accroissant la densité de dislocation car les dislocations gênent leurs mouvements mutuels (phénomène d'**écrouissage**),*
  - *en **raffinant** la microstructure du matériau pour augmenter les joints de grains qui eux aussi gênent le mouvement des dislocations,*
  - *en ajoutant des impuretés pour **bloquer** les dislocations (durcissement par ajout d'éléments d'alliage).*

(cf. Annexes 3, 5)

2.4.1 Relaxation - déformation permanente

- *Dans l'exp. de traction, on appelle **relaxation** le fait de laisser revenir la force (donc la contrainte réelle) à zéro.*
- *On observe que le point (ε, σ) représentatif de l'état de l'échantillon retourne sur l'axe $\sigma = 0$ en **ligne droite**. Cette ligne droite est parallèle à la montée élastique, sa pente est donc **exactement** égale au module d'Young E.*
- *Elle rejoint l'axe $\sigma = 0$ en l'abscisse ε_p : le taux de déformation réel permanent.*



courbe de traction réelle :

Evolution du couple (ε, σ) lors d'une relaxation.

Relation entre ε_r et ε_p :

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e}\right)^n$$

(Equ. de la déf. permanente)

2.4.2 Ecrouissage - définition

- *Une pièce ayant subi une traction jusqu'en zone plastique est dite **écrouie**.*
- *Si l'échantillon écroui subit une nouvelle exp. de traction, il revient à l'état de relaxation de façon **élastique** puis son point représentatif dans le plan (ε, σ) dessine la courbe qu'il aurait dessiné si la relaxation n'avait pas eu lieu.*

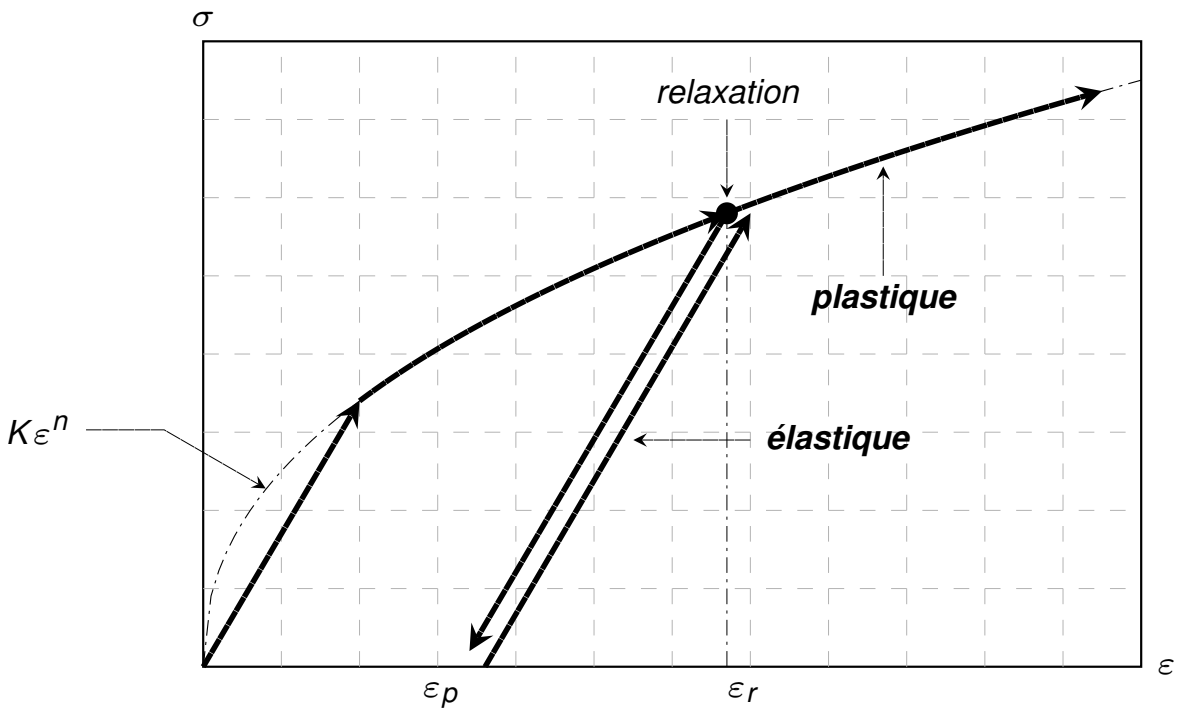


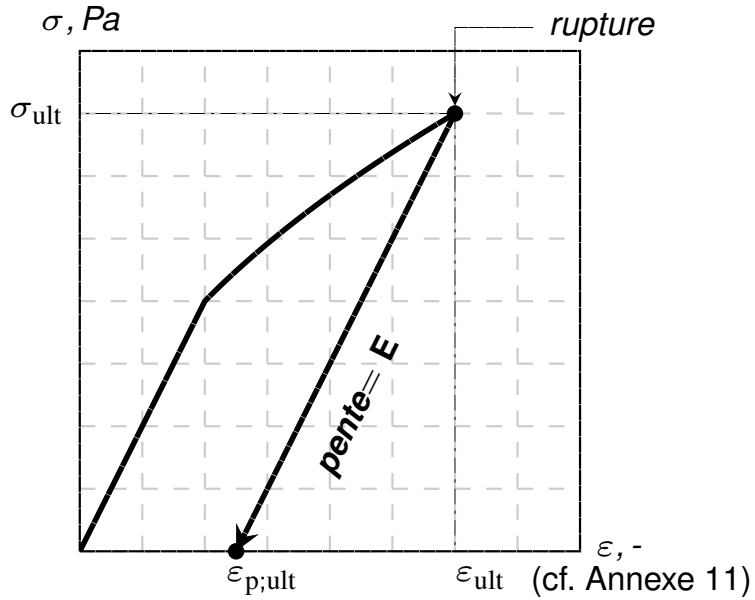
***Fig.9** Reprise de l'exp. de traction après relaxation.*

2.4.3 Contrainte de traction ultime

- *Dans une expérience de traction, il existe un taux de déformation réel ε_{ult}, appelé **taux de déformation réel en rupture**, à partir duquel l'échantillon se casse. La contrainte réelle mesurée à ce moment-là est la **contrainte de traction ultime (réelle)**. Elle est notée σ_{ult}.*
- *Depuis la situation de rupture, la relaxation amène l'échantillon à un état de déformation permanente caractérisé par le taux réel :*

$$\varepsilon_{p;ult} = \varepsilon_{ult} - \varepsilon_e^{1-n}\varepsilon_{ult}^{n} \tag{18}$$

  - *Le taux $\varepsilon_{p;ult}$ est ainsi le **plus grand taux de déformation** qu'on peut induire de façon **permanente** dans un échantillon !*



(cf. Annexe 11)

***ATTENTION :** Il ne faut pas confondre la contrainte de traction ultime σ_{ult} et la résistance R_m qui sera introduite au trspt. 2.6.1 et qui représente la force maximale qu'un échantillon de traction de section initiale unité peut supporter sans rompre (cf. trspt. 2.6.3).*

Programme de la seconde partie

5. Variation des dimensions latérales en plasticité

6. La force de traction et la contrainte nominale

7. L'inversion de la fonction de traction, applications

2.5.1 Variation des dimensions latérales en plasticité

- *En régime élastique, les variations des dimensions latérales et du volume de l'échantillon obeissent aux lois de Poisson (11), (12) et (13) :*

$$\begin{aligned} r &= r_0 \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon} \\ S &= S_0 \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon} \\ V &= V_0 \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon} \end{aligned}$$



Armand Considère (1841-1914)

- *En régime plastique et à l'instar de la loi de Hooke (10), ces lois ne sont plus valables.*
- *Elles vont être remplacées par les équations de Considère (ou de Hencky dans certains cas).*



Heinrich Hencky (1885-1951)

2.5.2 Théorie de Considère en plasticité

- *La théorie de Considère repose sur l'hypothèse que le volume de l'échantillon ne change plus dès lors qu'il a atteint la plasticité, autrement dit :*

$$V = V_{\mathrm{e}},\ \varepsilon \geq \varepsilon_{\mathrm{e}}, \tag{19}$$

avec $V_{\mathrm{e}} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}} V_0$*, le volume en limite élastique (13).*

- *La conclusion de (19) est que*

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V_{\mathrm{e}}}{V_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}}}, \quad \varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{e}} \tag{20}$$

$$\frac{S}{S_0} = \frac{V}{V_0} \times \frac{l_0}{l} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}} - \varepsilon} \quad \varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{e}} \tag{21}$$

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{e}^{(\frac{1}{2}-\nu)\varepsilon_{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\varepsilon}, \quad \varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{e}} \tag{22}$$

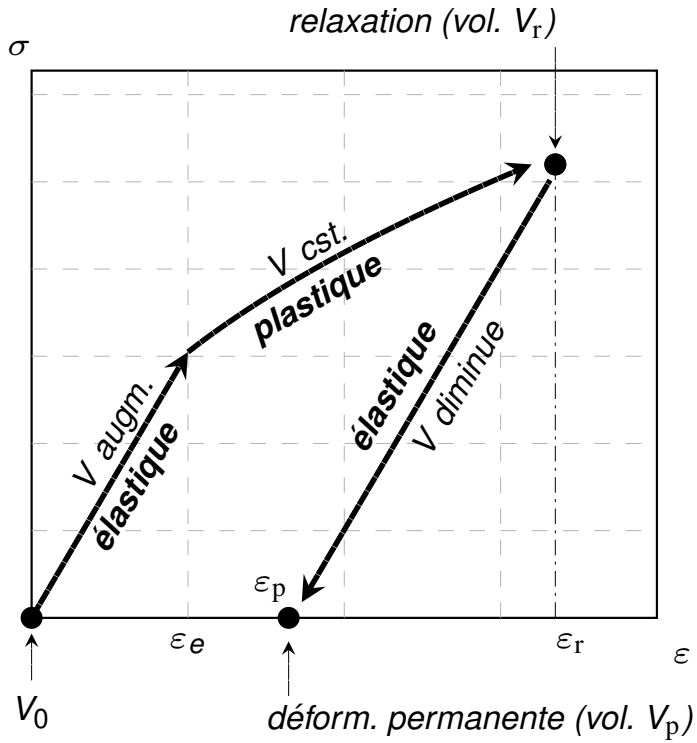
2.5.3 Inconsistance de la Théorie de Considère

- *La Théorie de Considère est en réalité inconsistante. Elle prédit en effet qu'un échantillon soumis à un cycle d'écrouissage et de relaxation diminue de volume (cf. exos) :*

$$V_\mathrm{p} < V_0.$$

et même que l'échantillon disparaît si on répète ce cycle indéfiniment :

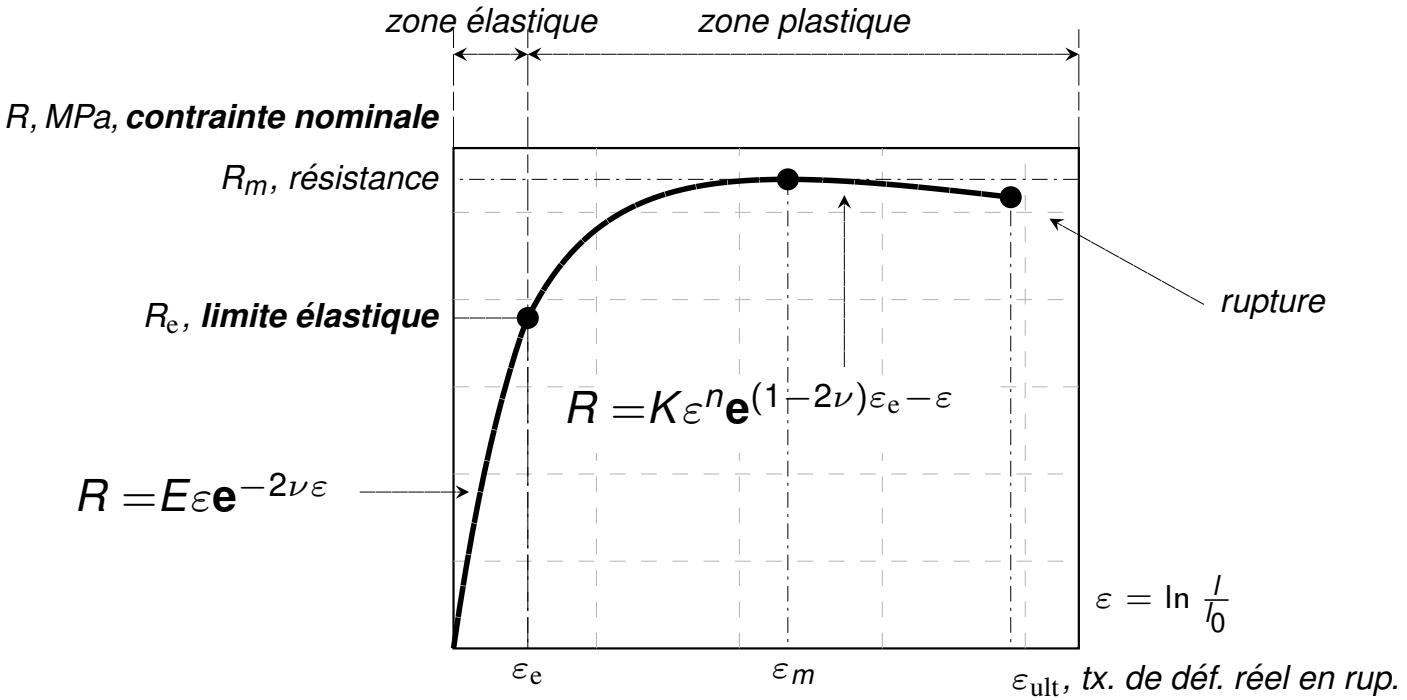
$$V_0 \to 0.$$



- *Il faudrait remplacer les rel. (20)-(22) par des équations qui prédisent qu'un cycle écrouissage-relaxation* ***conserve*** *le volume de l'échantillon* $V_\mathrm{p} = V_0$.
- *Ces équations sont celles de Hencky. Elles sont plus compliquées que celles de Considère or, pour un matériau standard (*$n \simeq 0$ *et* $\nu \simeq \frac{1}{2}$*), elles prédisent des comportements très voisins. En pratique, on appliquera donc (20)-(22).*

2.6.1 Courbe de traction - (appr. de Considère)

- *Les lois (Hooke, **Ludwik**[1], Poisson, Considère) donnent σ et S en fonction de ε et S_0 : $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ et $S = S_0 s(\varepsilon)$ avec $s(\varepsilon) = \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}$ ou bien $s(\varepsilon) = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon}$.*
- *La force de traction $F = \sigma S$ est donc proportionelle à S_0 : $F = S_0\,[\sigma(\varepsilon)s(\varepsilon)]$.*
- *Le rapport $R = F/S_0$ est appelé contrainte nominale : $R{=}\sigma(\varepsilon)s(\varepsilon)$*



(cf. Annexes 8, 9, 10)

1. La situation obtenue avec d'autres lois d'écrouissage (e.g. Swift) sera traitée en exercice.

2.6.2 Courbe de traction et résistance

(1) ***(Cas général)*** *Si $\varepsilon_e < n \leq \varepsilon_{ult}$, alors la résistance est atteinte en phase d'écrouissage (cf. trspt. 2.6.1). Pour un matériau recuit et sous l'hyp. de Considère :*

$$\varepsilon_m = n; \quad R_m = K\left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e}.$$

(2) ***(Cas matériau fragile)*** *Si $n > \varepsilon_{ult}$ alors la résistance est atteinte à la* ***rupture****. Si on applique l'hypothèse de Considère et qu'on désigne par σ_{ult} la contrainte de traction ultime réelle, on a*

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{ult}; \quad R_m = R(\varepsilon_{ult}) = \sigma_{ult}\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon_{ult}}$$

(3) ***(Cas matériau dur)*** *Si $n < \varepsilon_e$ alors la résistance est atteinte en* ***zone élastique*** *:*

$$\textit{si } \varepsilon_e < \frac{1}{2\nu} : \quad \varepsilon_m = \varepsilon_e; \qquad R_m = R_e,$$
$$\textit{si } \varepsilon_e \geq \frac{1}{2\nu} : \quad \varepsilon_m = \frac{1}{2\nu}; \quad R_m = \frac{E}{2\nu\mathbf{e}}.$$

(cf. Annexes 12, 14)

2.6.3 Résistance et contrainte de traction utlime

- *La résistance R_m est la **force maximale** qu'un échantillon de traction de section initiale unité peut supporter. Cette quantité se lit sur la **courbe de traction**. Il ne faut par confondre R_m avec la contrainte de traction ultime σ_{ult} (cf. trspt. 2.4.3) qui correspond à la **contrainte de traction réelle** qu'on mesure au moment de la rupture. Cette quantité se lit sur la **courbe de traction réelle**. A cause de la diminution des dimensions latérales (Poisson), on a toujours que*

$$\sigma_{ult} > R_m .$$

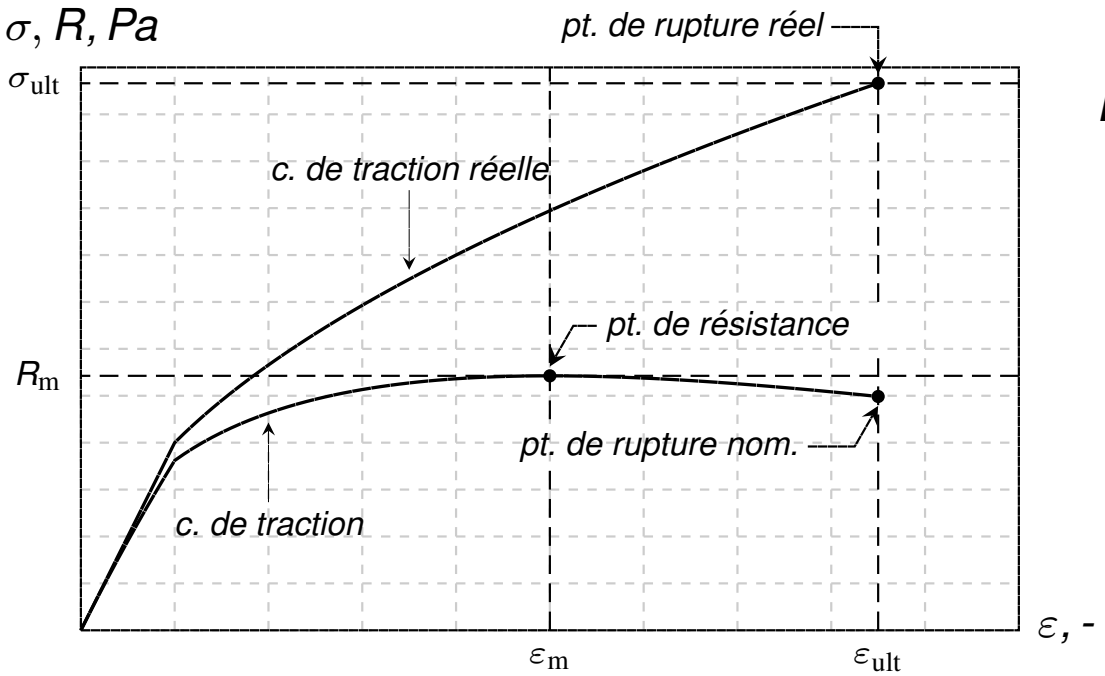


***Fig.** courbes de traction, matériau ductile*

(cf. Annexe 18)

2.6.4 Fonction de traction

- *Le module d'écrouissage est lié à la résistance. Pour un matériau recuit et si on admet l'**approximation de Considère** pour les variations des dimensions latérales, on a*

$$K = R_m \left(\frac{\mathbf{e}}{n}\right)^n \mathbf{e}^{-(1-2\nu)\varepsilon_e}$$

- *Dans ces conditions, on obtient une expression simple de la contrainte nominale*

$$R = R(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}, & \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ R_m \left(\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon}{n}}\right)^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_e \end{cases}$$

qu'on appelle fonction de traction.

- ***Utilité de la fonction de traction :***
  - *La fonction de traction permet de calculer la **force de traction** F nécessaire à atteindre un **taux de déformation** ε donné sur un échantillon de section initiale S_0 : $F = S_0 R(\varepsilon)$.*
  - *Pour calculer le **taux de déformation** ε qu'on atteint sur un échantillon de section initiale S_0 lorsque la **force de traction** F est imposée, il faudra par contre inverser la fonction de traction : $\varepsilon = R^{-1}(F/S_0)$.*

2.7.1 Inversion de la fonction de traction

(1) ***Cas élastique :*** *Si $F/S_0 \leq R_e$, l'équation à résoudre est*

$$\frac{F}{S_0} = E\varepsilon \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}.$$

(2) ***Cas plastique :*** *Si $R_e < F/S_0 < R_m$, l'équation à résoudre pour un matériau recuit et sous l'hypothèse de Considère, est*

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left(\frac{\varepsilon}{n}\mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon}{n}}\right)^n.$$

(3) ***Cas de rupture :*** *Si $F/S_0 > R_m$, la déformation peut être menée jusqu'à la rupture :*

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ult}}$$

(cf. Annexes 16)

2.7.2 Inversion de la fonction de traction - plasticité

- ***l'équation à résoudre est transcendante*** *et cela même sous l'hypothèse de Considère. Dans le cas d'un matériau recuit, cette équation est :*

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left(\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon}{n}} \right)^n .$$

- ***Méthode de résolution pour trouver*** $\varepsilon < n$ *:*
  - *On pose* $\alpha = \frac{1}{\mathbf{e}} \sqrt[n]{\frac{F}{R_m S_0}}$.
  - *A partir de la condition initiale* $x_0 = \alpha$*, on effectue l'itération de pt. fixe*

$$x_{m+1} = \alpha \mathbf{e}^{x_m}, \; m = 0, 1, 2 \ldots$$

  - *On appelle* $\bar{x}$ *sa limite et on trouve le taux de déformation réel* ($\varepsilon < n \equiv \varepsilon_m$)

$$\varepsilon = n\bar{x}$$

(cf. Annexe 17)

Programme de la troisième partie

8. Energie de déformation

9. L'expérience de dureté

10. L'expérience de compression

2.8.1 Energie spécifique de déformation

- *Le travail fourni sur un épisode de l'expérience de traction est*

$$dA = S\sigma dl \Longrightarrow dA = V\sigma d\varepsilon.$$

- *Le travail total pour amener l'échantillon au taux de déformation réel* ε_f *vaut :*

$$A = \int_0^{\varepsilon_f} V\sigma d\varepsilon$$

- *Si le matériau est* ***incompressible*** *alors* $V = V_0$ *et*

$$A = V_0 \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon = V_0\eta$$

$$\text{où} \quad \eta = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \qquad \textbf{\textit{(énergie spécifique de déformation)}}$$

  - *Pour un matériau général,* $V_0\eta$ *est une* ***sous-estimation*** *du travail A.*
  - *Pour un matériau général,* $V_f\eta$ *est une* ***sur-estimation*** *du travail A.*

(cf. Annexes 19, 20)

2.8.2 Ténacité - Définition

*La **ténacité** T est l'énergie spécifique de déformation jusqu'en rupture :*

$$T = \int_0^{\varepsilon_{ult}} \sigma d\varepsilon$$

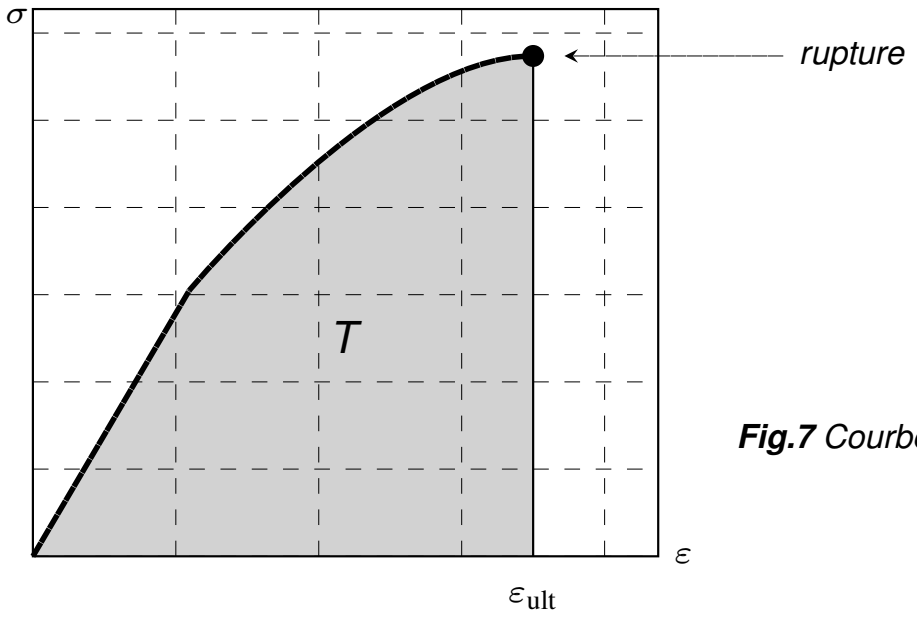


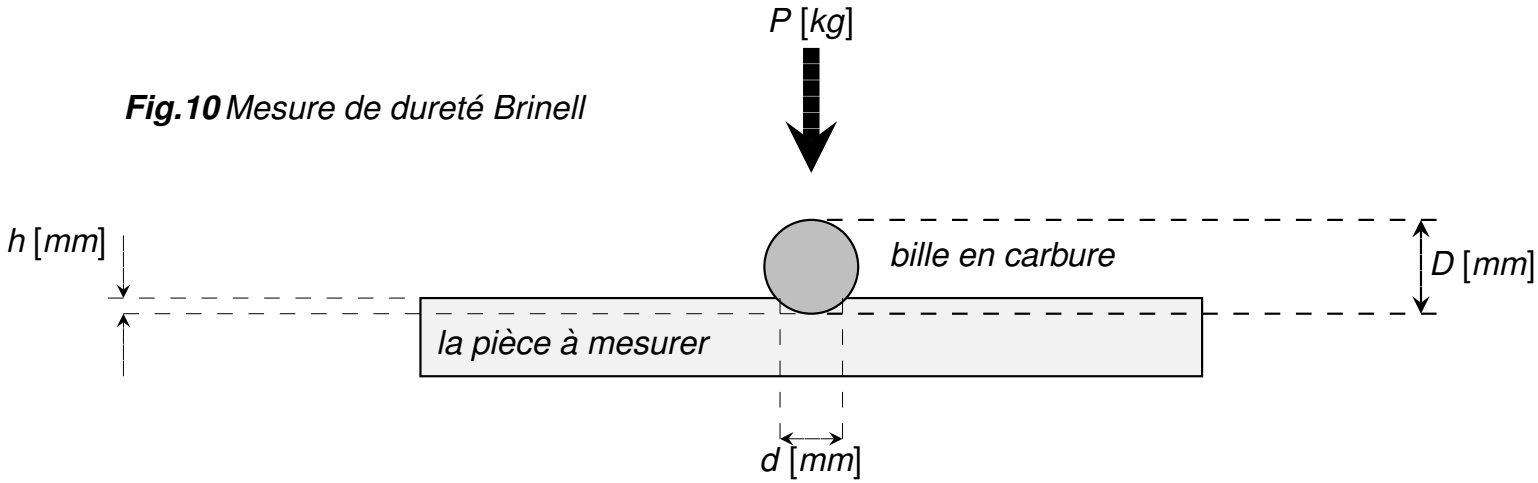
***Fig.7** Courbe de traction réelle*

(cf. Annexe 22)

2.9.1 L'expérience de dureté - Définition

- *La dureté est une mesure hybride corrélée à la limite élastique mais aussi à l'usure.*
- *Les mesures de dureté standardisées sont nombreuses (Brinell, Vickers, Rockwell). Elles sont en principe simples et non destructives.*
- *La mesure la plus classique est due à Brinell (dureté HB).*

Fig.10 *Mesure de dureté Brinell*



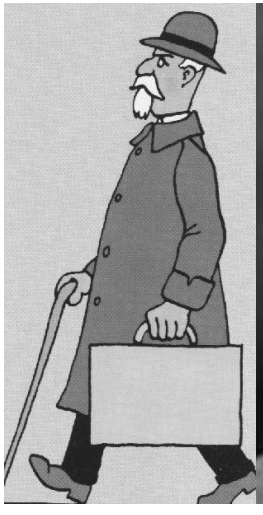
$$HB = \frac{\text{charge en } [kg]}{\text{surface de l'empreinte en } [mm^2]} = \frac{P}{\pi D h} = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

2.9.2 Dureté et Limite élastique.

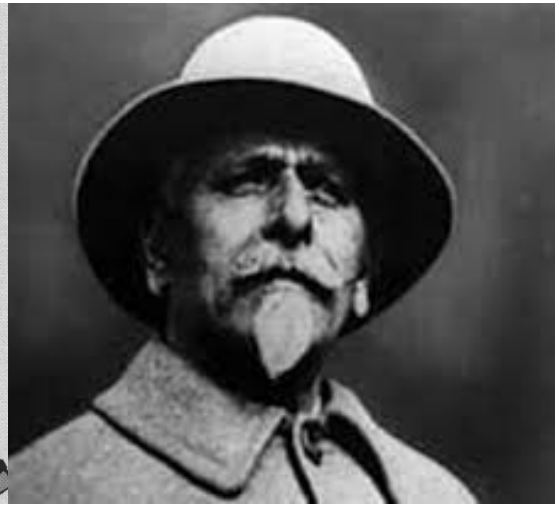
- *Il existe une relation approximative entre la dureté et la limite élastique.*
- *Lorsque l'on donne HB en unité de* $[kg/mm^2]$*, on peut approcher* R_e *en unité de* $[MPa]$ *grâce aux formules :*
  - $R_e \simeq 3.5HB$*, pour des matériaux écrouis,*
  - $R_e \simeq 2.0HB$*, pour des matériaux recuits.*



J.A.Brinell (1849-1925)



M. Bazaroff
Ds "L'oreille cassée"



Basil Zaharoff (1849-1936)
former CEO of Vickers Ltd

2.10.1 L'expérience de compression

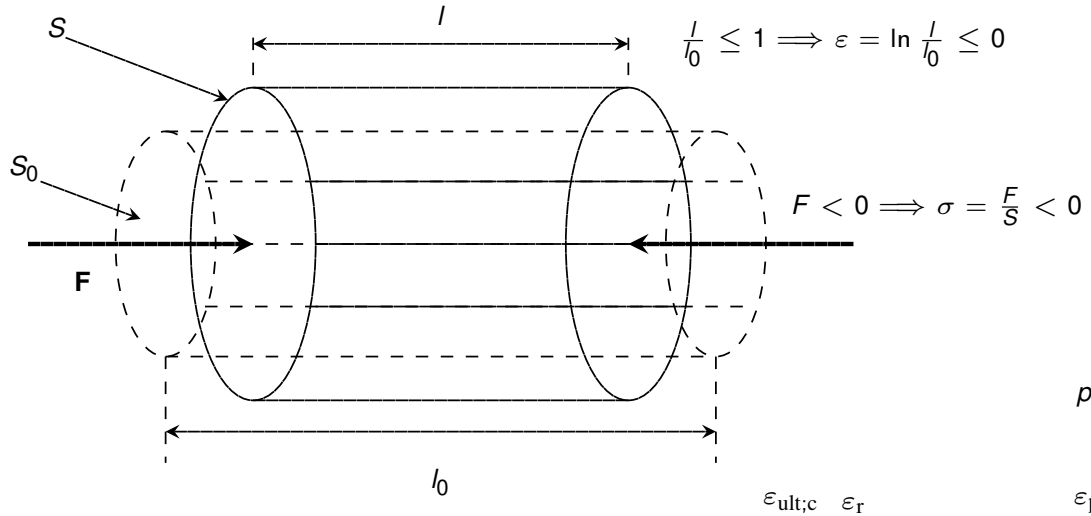
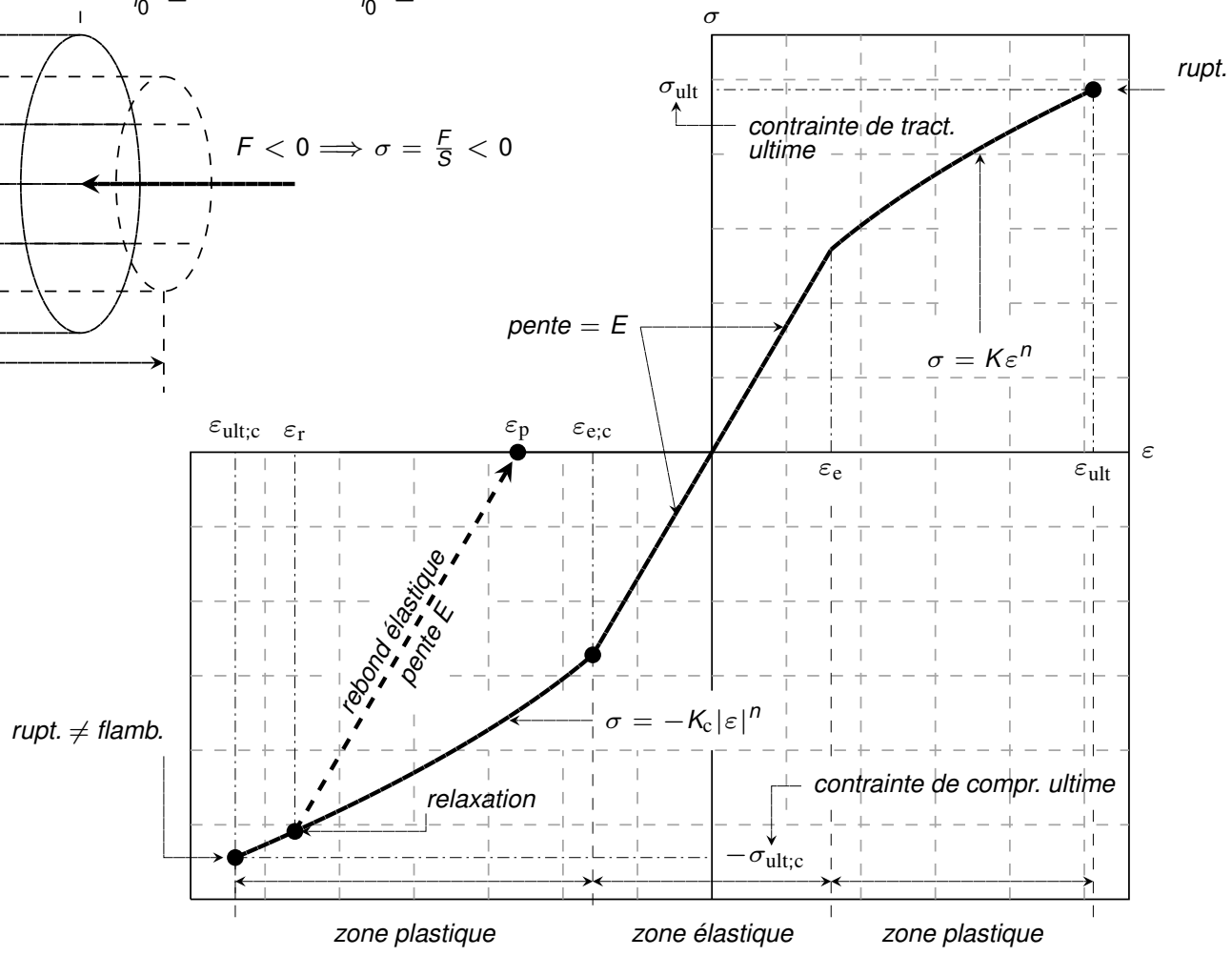


Fig.11 *Courbe de traction réelle*



En général :

$$\varepsilon_{e;c} = -\varepsilon_e \text{ et } K_c = K$$

$$\sigma_{ult;c} > \sigma_{ult} \text{ et } \varepsilon_{ult;c} < -\varepsilon_{ult}$$

Déf. permanente :

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{e;c}} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{e;c}} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_{e;c}}\right)^n$$

2.10.2 Loi de Poisson et de Considère en compression

- *Les lois de Poisson et de Considère se maintiennent avec la même valeur du coefficient de Poisson ν que pour la traction.*

Situation	$\varepsilon \leq \varepsilon_{e;c}$ (***élasticité***)	$\varepsilon > \varepsilon_{e;c}$ (***plasticité***)
$\frac{r}{r_0}$	$\mathbf{e}^{-\nu\varepsilon}$	$\mathbf{e}^{(\frac{1}{2}-\nu)\varepsilon_{e;c}-\frac{1}{2}\varepsilon}$
$\frac{S}{S_0}$	$\mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}$	$\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{e;c}-\varepsilon}$
$\frac{V}{V_0}$	$\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon}$	$\mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_{e;c}}$

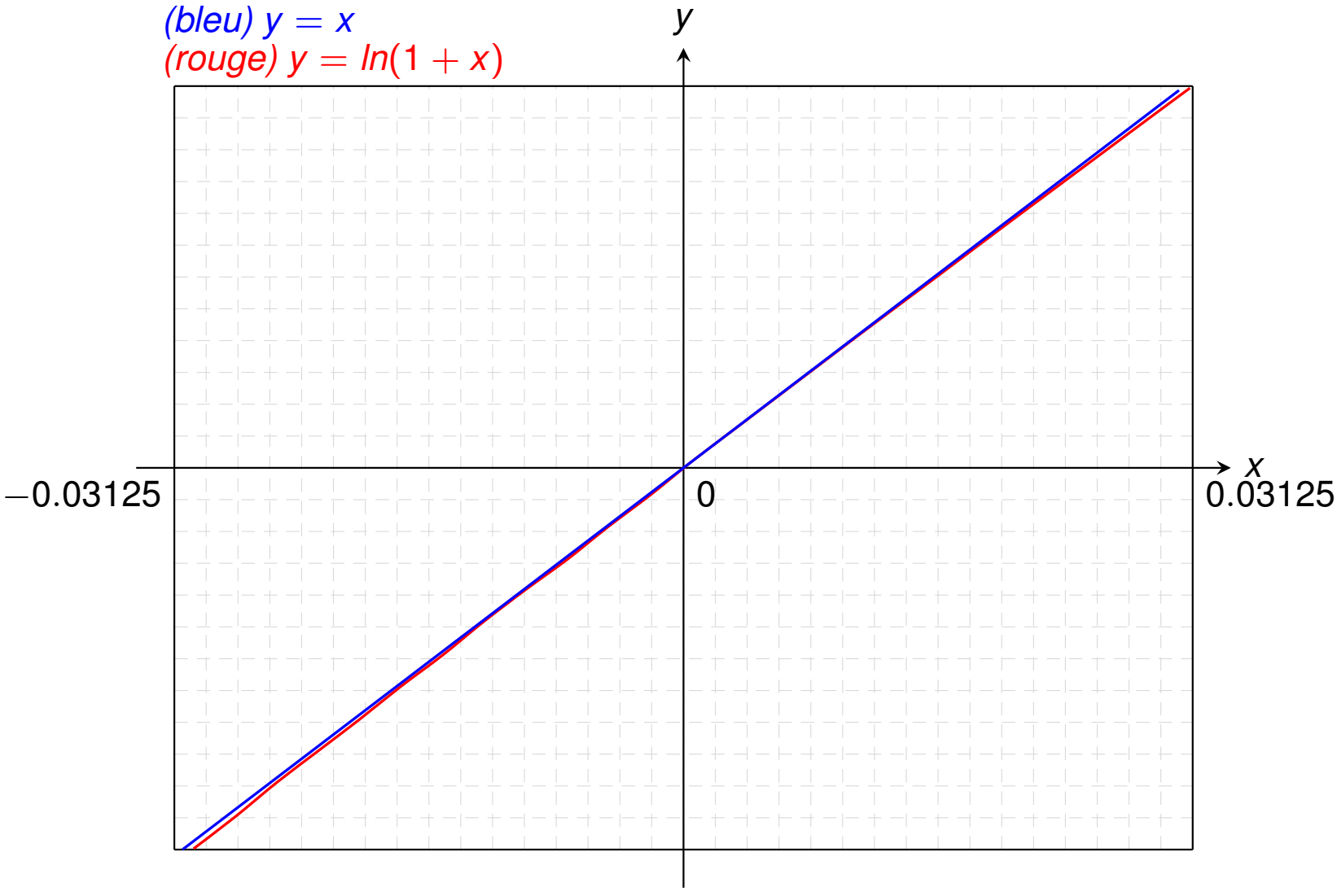
- *Il faut noter que les taux de déformations ε et $\varepsilon_{e;c}$ sont **négatifs**.*
- *Les formules ci-dessus prévoient donc des **augmentations** de rayon et de section mais des **diminutions** de volume (car $\nu \leq \frac{1}{2}$).*
- *L'hypothèse de Considère est toujours inconsistante puisqu'elle prédit une augmentation plastique du volume après rebond. Cependant, pour la plupart des matériaux, elle donne lieu à de bonnes sur-estimations de la réalité (formule de Hencky).*

ANNEXES, TABLES ET BIBLIOGRAPHIE

A 1: Terminologie anglaise

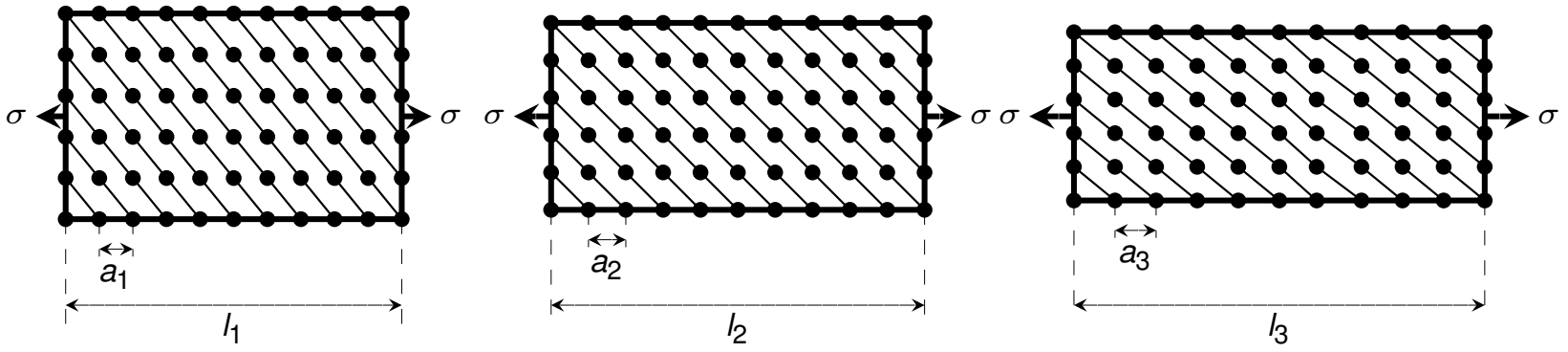
Français	*Anglais*
Taux de déformation :	*Real strain*
Taux de déformation nominal : .	*Engineering strain*
Contrainte (réel, nominale) :	*(Real, engineering) stress*
Essai de traction :	*Tensile test*
Courbe de traction :	*Tensile curve*
Essai de compression :	*Compressive test*
Essai de cisaillement :	*Shear test*
Limite élastique :	*Yield (tensile) strength*
Résistance :	*Ultimate (tensile) strength*
Dureté :	*Hardness*
Ténacité :	*Tenacity*
Module d'elasticité :	*Elasticity modulus*
Module de cisaillement :	*Shear modulus*
Coefficient de Poisson :	*Poisson ratio*
Ecrouissage :	*(Work or strain) hardening*
Dislocation :	*Dislocation*

A 2: Comparaison entre $y = x$ et $y = \ln(1 + x)$

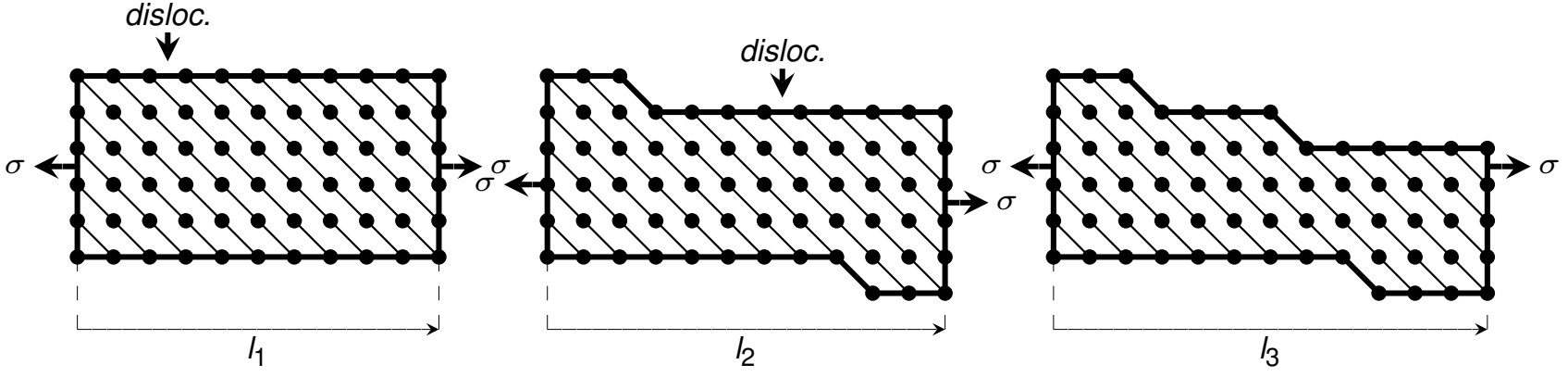


A 3: Mobilisation des dislocations

Elasticité ($\sigma < \sigma_e$) : modification des paramètres de maille

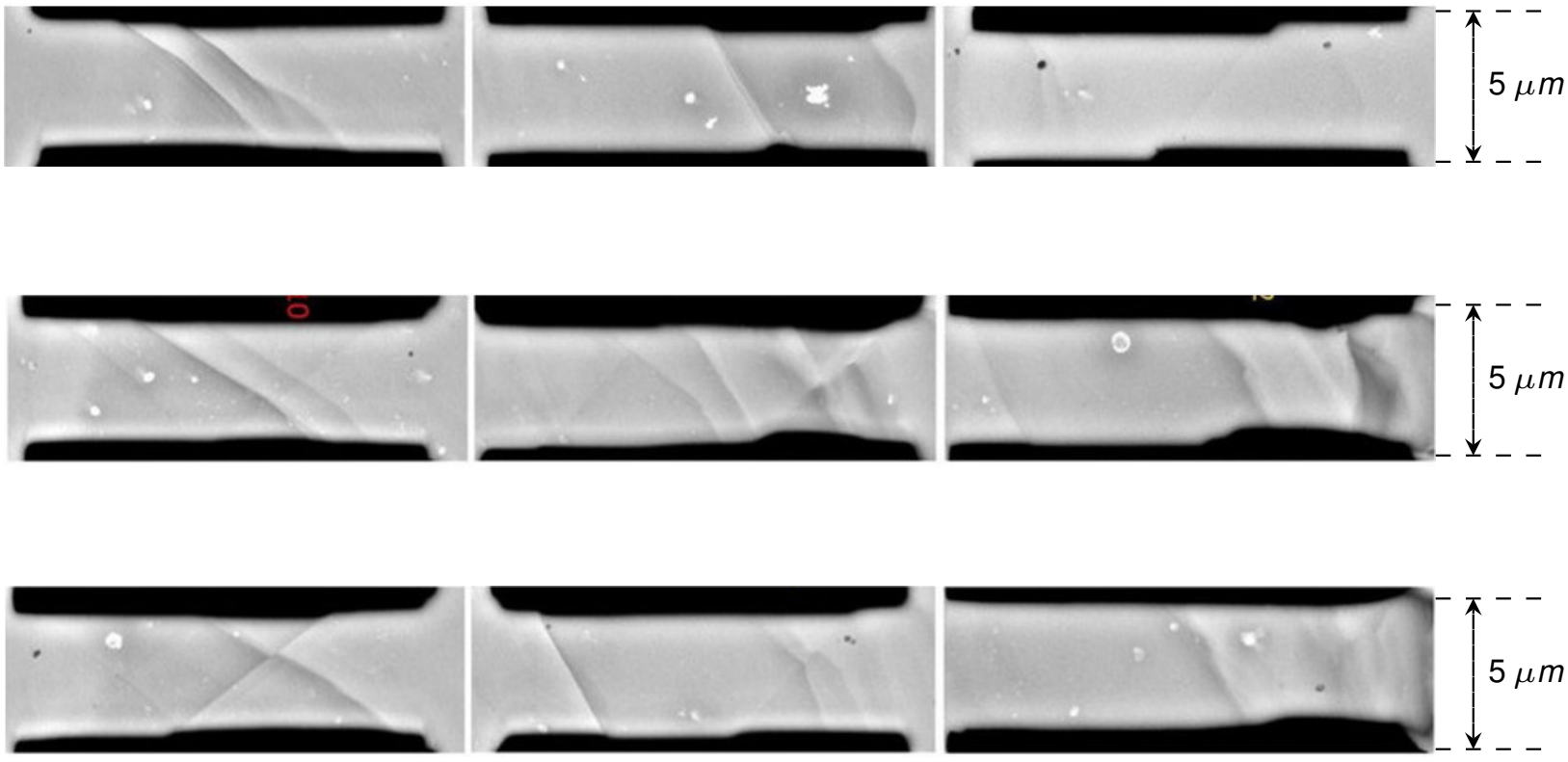


Plasticité ($\sigma > \sigma_e$) : création et mouvement de dislocations



A 4: Déformation plastiques

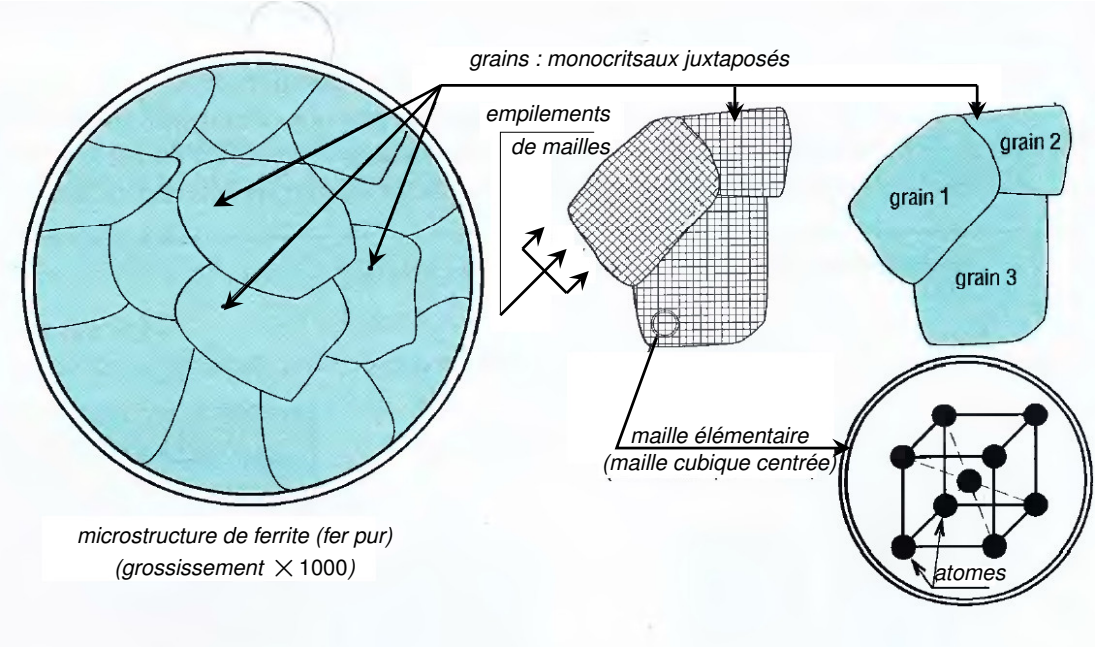
Observation TEM de micro-spécimens de traction



source : Hu, Zuqi et al., Microstructure Formation and Micropillar Compression of Al-TiC Nanocomposite Manufactured by Solidification Nanoprocessing, Metallurgical and Materials Transactions A, 08.2019

A 5: Microstructures et grains

- *Les métaux sont formés de monocristaux ou **grains** placés côte à côte et de forme polygonale plus ou moins régulière.*
- *A l'intérieur d'un grain, les atomes sont disposés de façons périodiques. La structure répétée périodiquement est appelée **maille** (e.g. maille cubique centré, maille cubique face centrée).*



source : Fanchon

- *Les traitements thermiques sont susceptibles de modifier la microstrutcure (i.e la taille et la morphologie des grains).*

A 6: Courbe de traction réelles - différentes val. de *n*

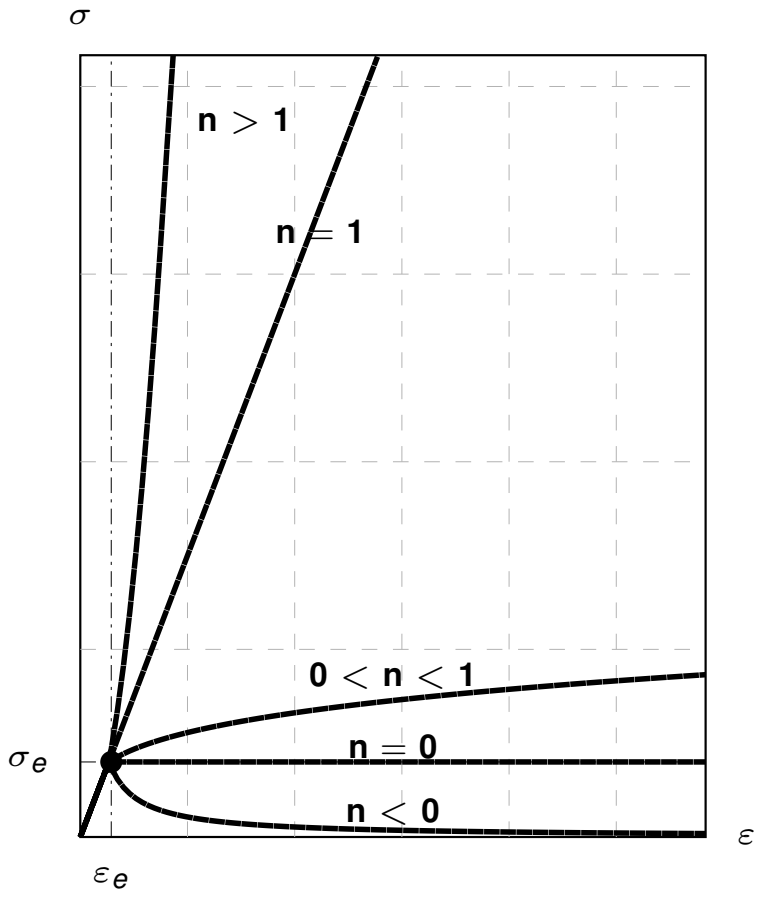
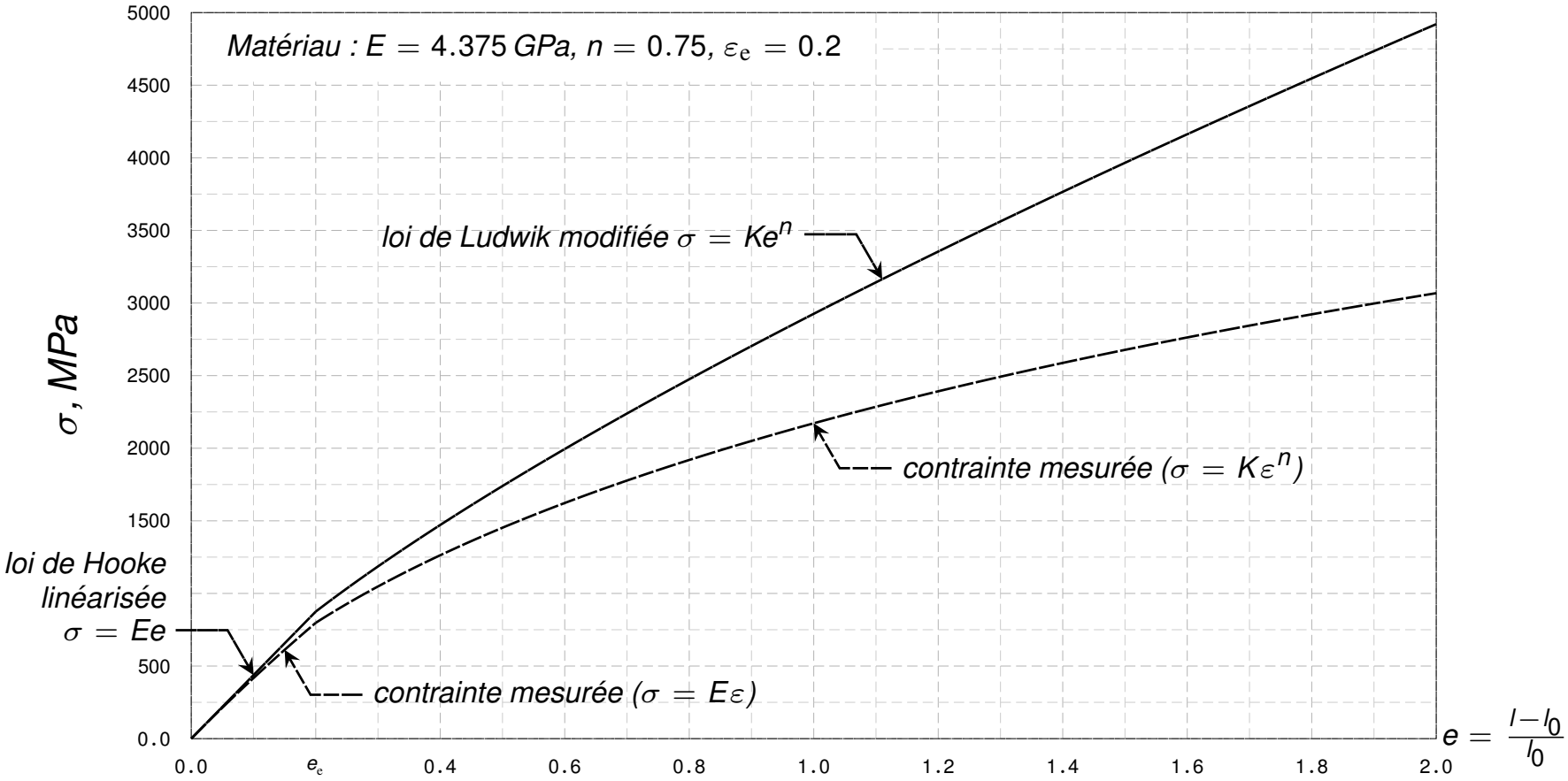


Fig. *Courbe de traction réelle*

A 7: Utilisation du taux nominal

- *Pour le matériau donné, calculons la contrainte réelle en remplaçant le taux réel ε par le taux nominal e dans les lois de Hooke/Ludwik. Ajoutons sur le même graphique, la valeur de σ telle qu'elle sera mesurée. L'erreur n'est pas significative dans le contexte des petites déformations (e.g. $e \ll 0.05$), mais est impossible à justifier dans le cas des grandes déformations.*



A 8: Valeurs nominales et valeurs réelles

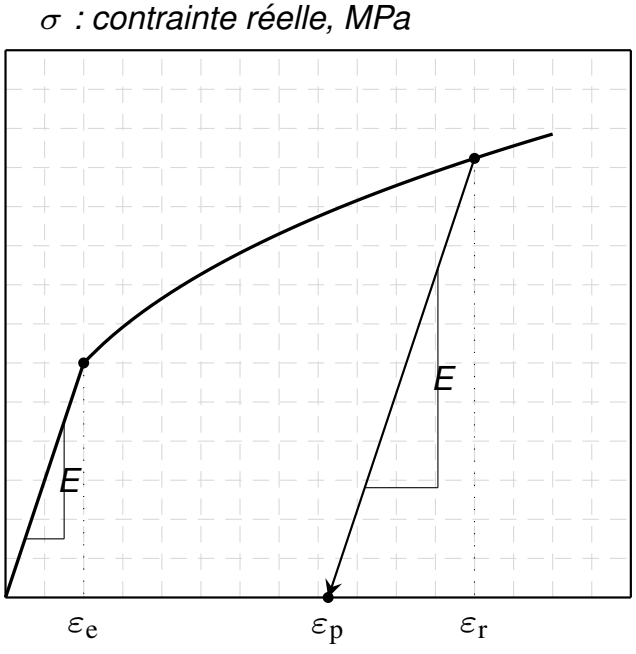
	réel	***nominal***
taux de déformation	$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$	$e = \frac{l-l_0}{l_0}$
contrainte	$\sigma = \frac{F}{S}$	$R = \frac{F}{S_0}$

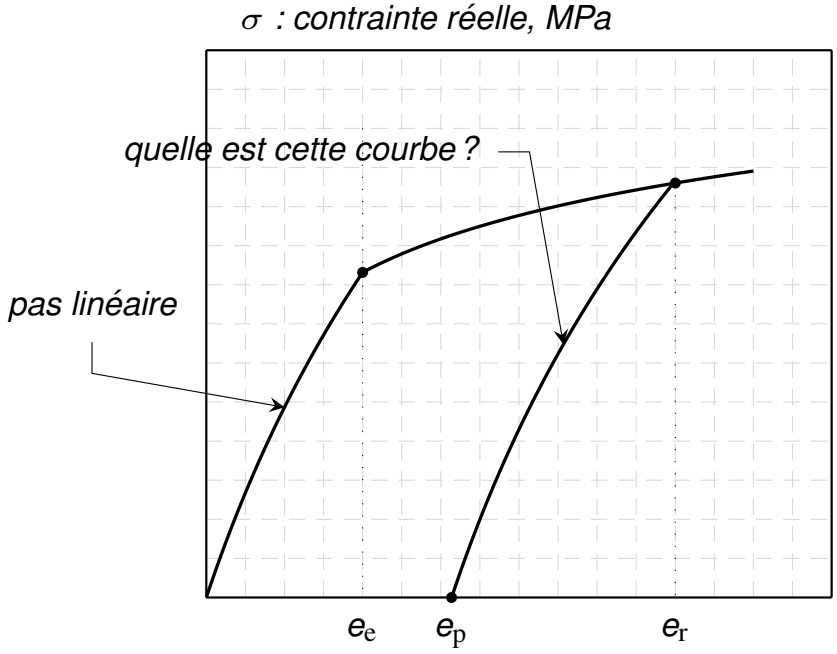
- *Le taux de déformation nominal a un avantage calculatoire, mais il n'est usité que dans le contexte des petites déformations car, dans ce cas, il est peu différent du taux réel. Pour étudier les procédés de formage, il est important d'utiliser le taux réel. On bénéficie de ses avantages :*
  - (i) *linéarité de la loi de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$ or $\sigma \approx Ee$ seul. si $e \ll 5\%$ (cf. exos)),*
  - (ii) *étude des rebonds élastiques simplifiée,*
  - (iii) *incrément de taux ne dépendant que de la config. courante donc additivité !*
- *La **contrainte nominale** est par contre une grandeur **fondamentale** et très utile. Elle représente la **force** développée par la machine de traction **normalisée par la surface initiale** de l'échantillon. C'est une image de la **charge** appliquée. En conséquence, le terme force normalisée serait plus adapté que contrainte nominale.*
- *Les informations données par σ et R sont **complémentaires**. La contrainte de traction réelle représente la contrainte de traction **physique** telle qu'on peut la mesurer à l'intérieur de l'échantillon.*
- *Notons que $R \leq \sigma$ à cause de la décroissance de la section de l'échantillon.*

A 9: Rebond élastique en taux réel ou nominal

avec le taux réel

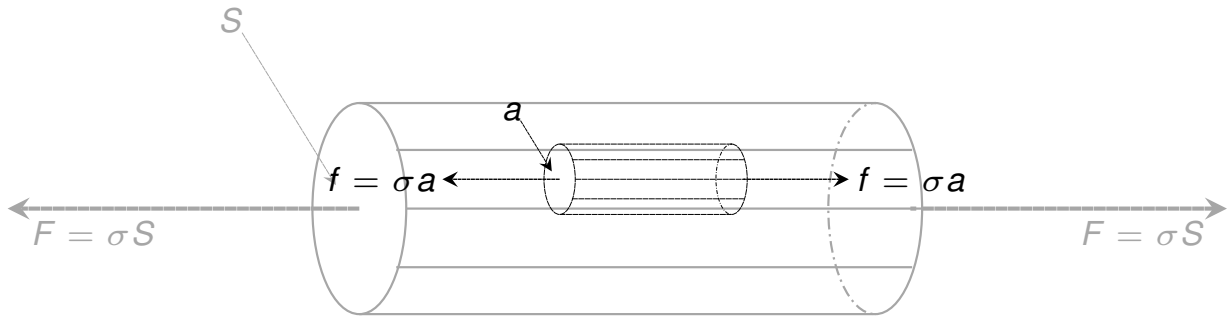
avec le taux nominal





A 10: Etat de contrainte local

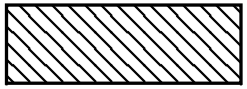
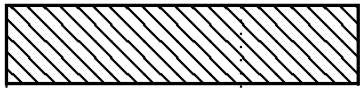
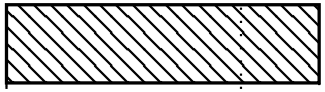
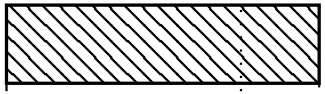
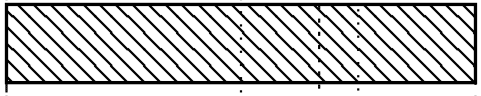
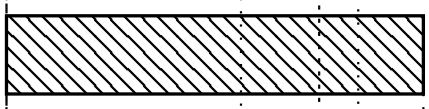
- *La contrainte de traction σ ne s'applique pas que sur les faces extrêmes de l'échantillon. L'équilibre mécanique de chaque portion d'échantillon implique que la contrainte σ se répercute sur chaque surface interne de l'échantillon perpendiculaire à l'axe de traction. Ce fait est illustré à la Fig. ci-dessous.*



- *En cours d'une expérience de traction, l'échantillon est dans un **état de contrainte homogène** : une traction uniaxiale dont l'amplitude est égale à la contrainte réelle σ. On peut donc mesurer σ à l'aide d'une **jauge de contraintes**.*

A 11: Cycles d'étirage et de recuit

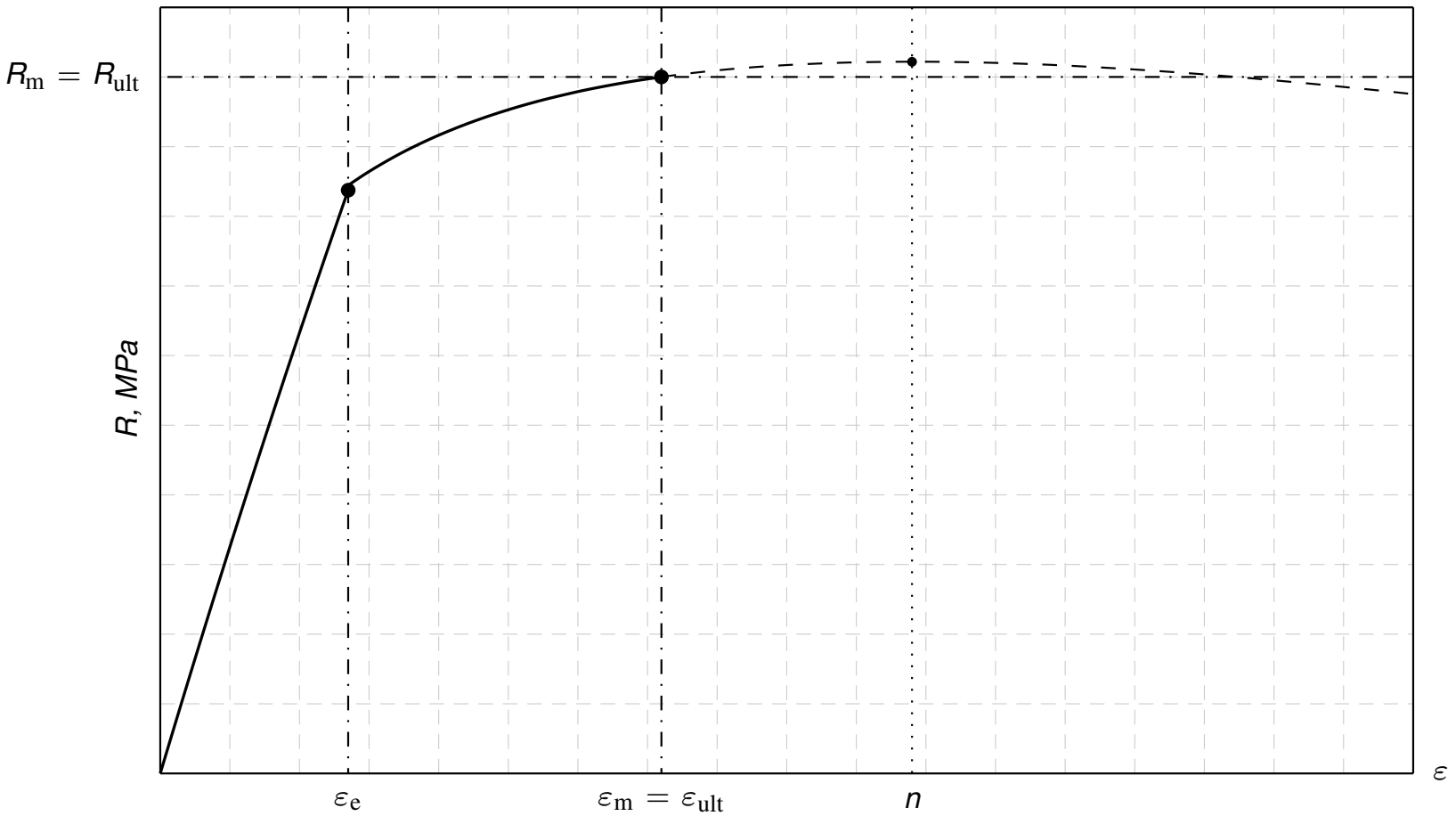
- *Si* $\varepsilon_p > \varepsilon_{p;ult}$, *on itère les op. de formage en intercalant des recuits d'adoucissement.*

Etape	*Echantillon*	*Longueur*	*Taux de déf. réel*
départ		l_0	0
1*ère trac.*		$l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{ult}}$	ε_{ult}
1*ère relax.*		$l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{p;ult}}$	$\varepsilon_{p;ult}$
1*er tr. therm.*		$\approx l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{p;ult}}$	$\approx \varepsilon_{p;ult}$
2*ème trac.*		$l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{p;ult}} \mathbf{e}^{\varepsilon_{ult}}$	$\varepsilon_{p;ult} + \varepsilon_{ult}$
2*ème relax.*		$l_0 \mathbf{e}^{\varepsilon_{p;ult}} e^{\varepsilon_{p;ult}}$	$2\varepsilon_{p;ult}$

A 12: Courbe de traction pour un materiau fragile

- *Si* $\varepsilon_{\text{ult}} < n$, *la contrainte nominale maximale est réalisée à la rupture :*

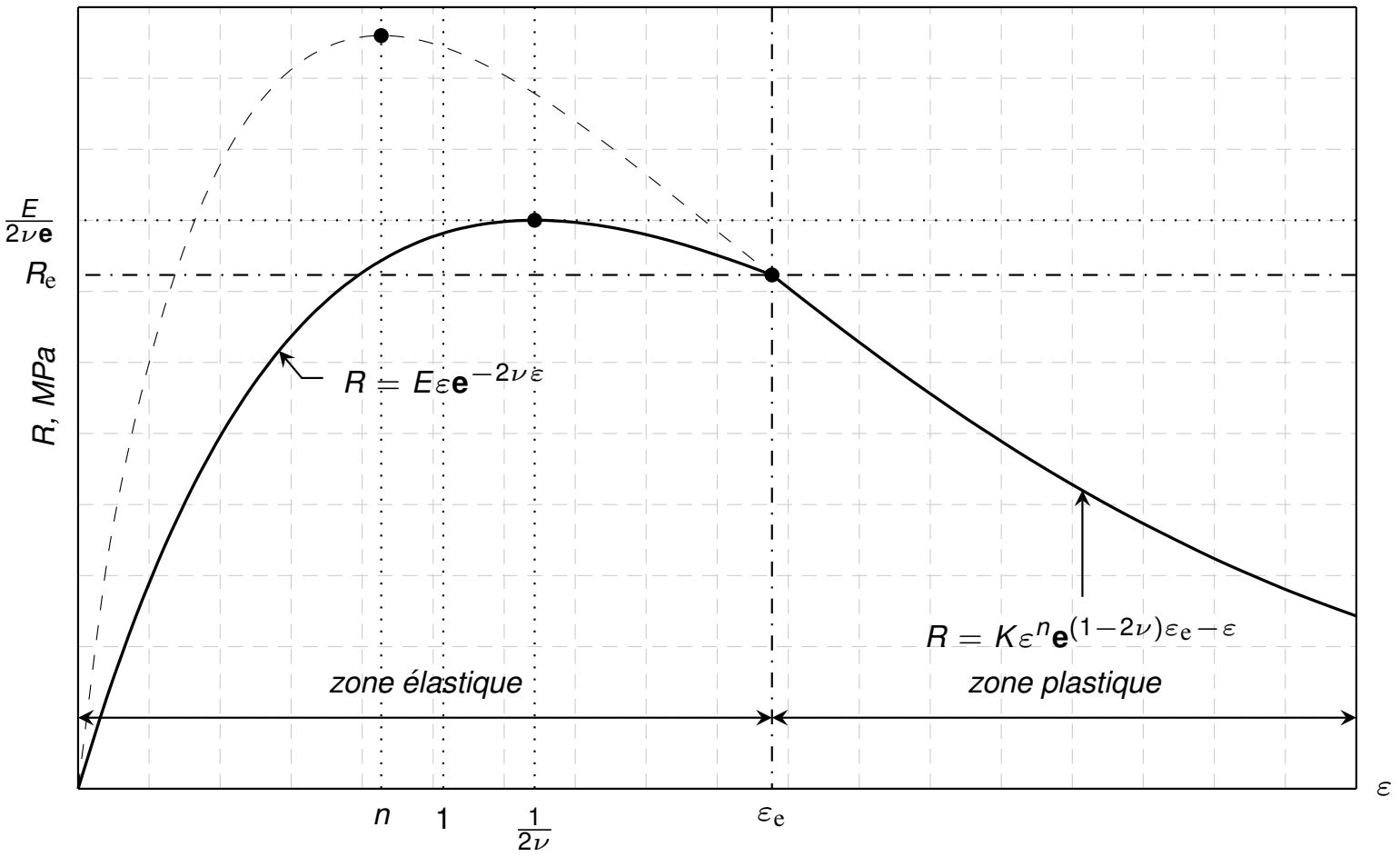
$$\varepsilon_{\text{m}} = \varepsilon_{\text{ult}} \quad \textit{et} \quad R_{\text{m}} = R_{\text{ult}}.$$



A 13: Courbe de traction pour un matériau très dur

- *Si* $\varepsilon_e > \frac{1}{2\nu}$, *la résistance est atteinte à l'intérieur de la zone élastique :*

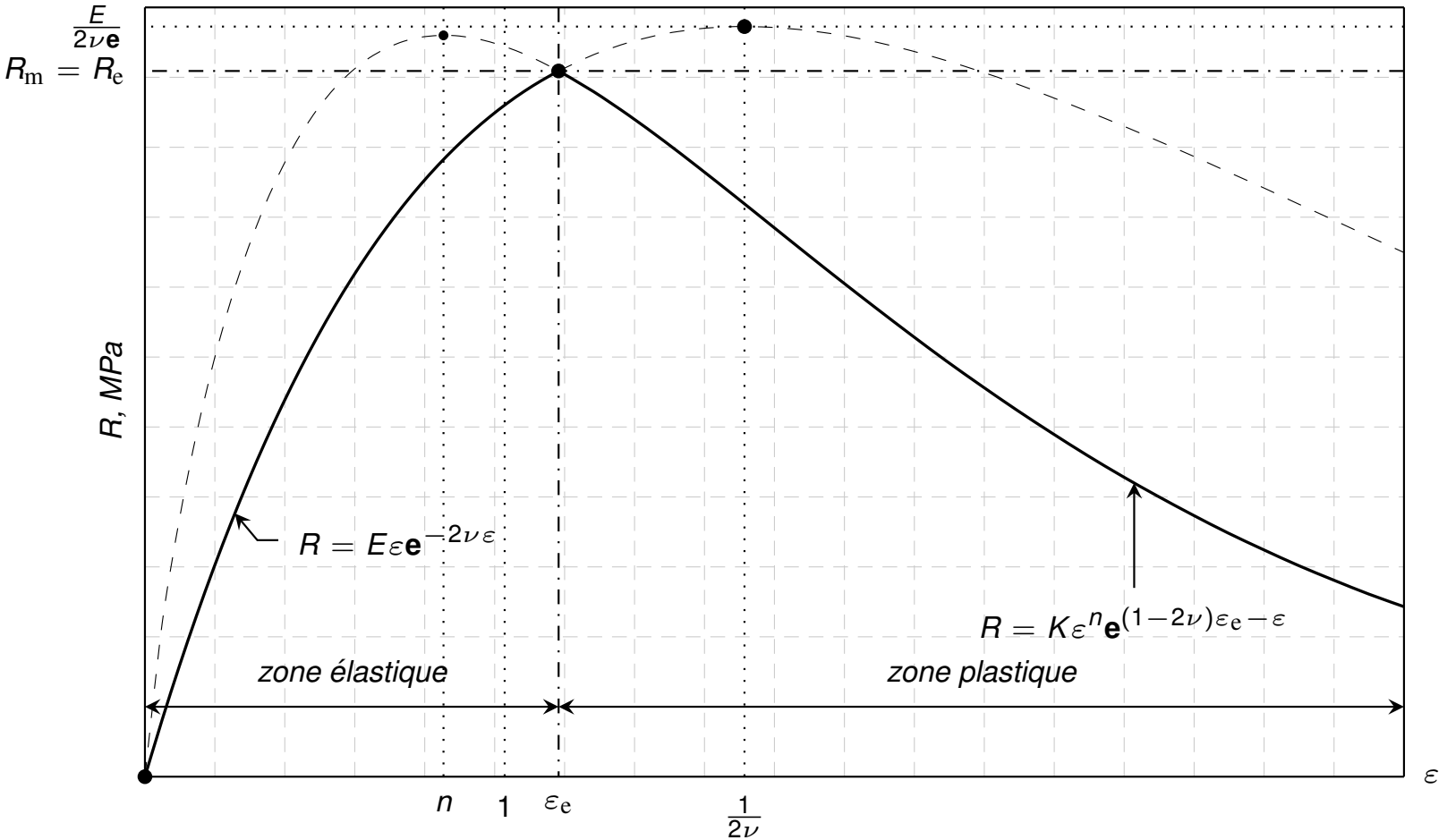
$$\varepsilon_m = \frac{1}{2\nu} \quad et \quad R_m = \frac{E}{2\nu \mathbf{e}}.$$



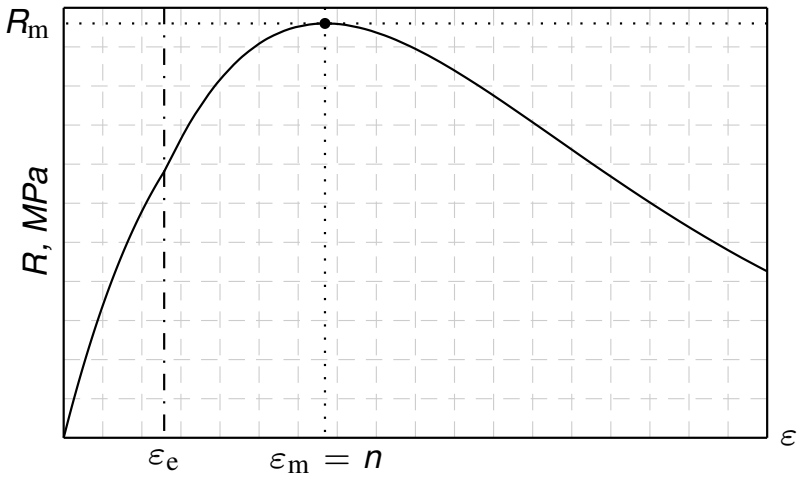
A 14: Courbe de traction pour un matériau dur

- *Lorsque* $\varepsilon_e \leq 1/2\nu$ *mais* $\varepsilon_e > n$, *la résistance est atteinte en limite élastique :*

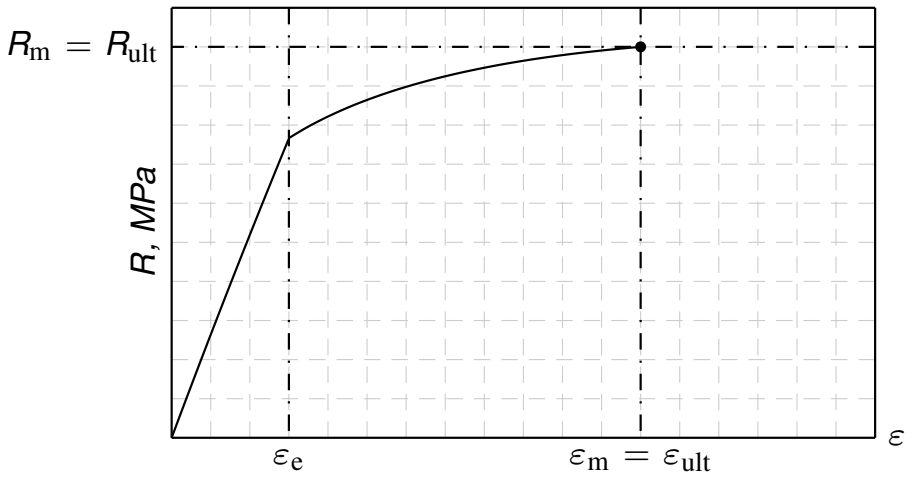
$$\varepsilon_m = \varepsilon_e \quad \textit{et} \quad R_m = R_e.$$



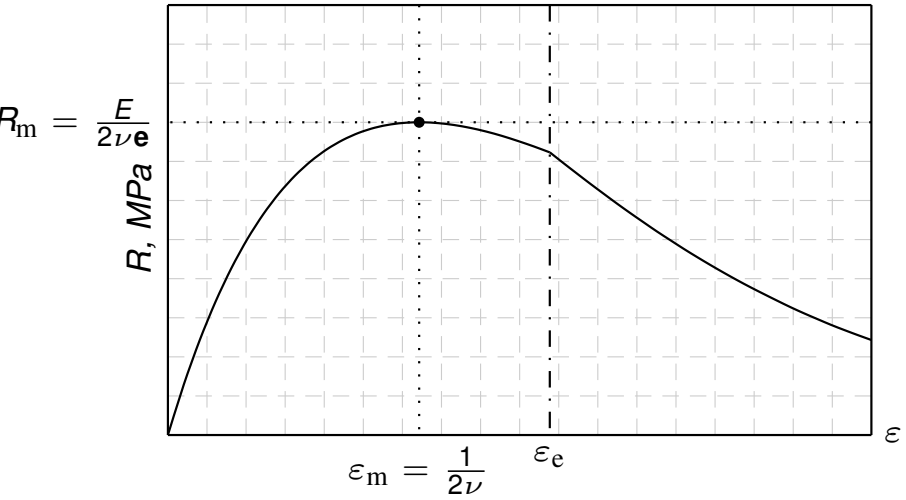
A 15: Courbes de traction (Ludwik-Considère)



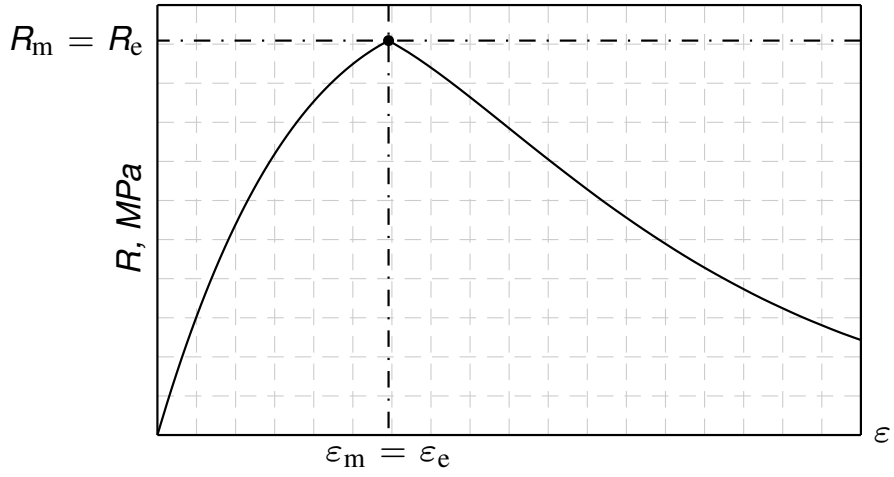
cas général (matériau formable)



matériau fragile

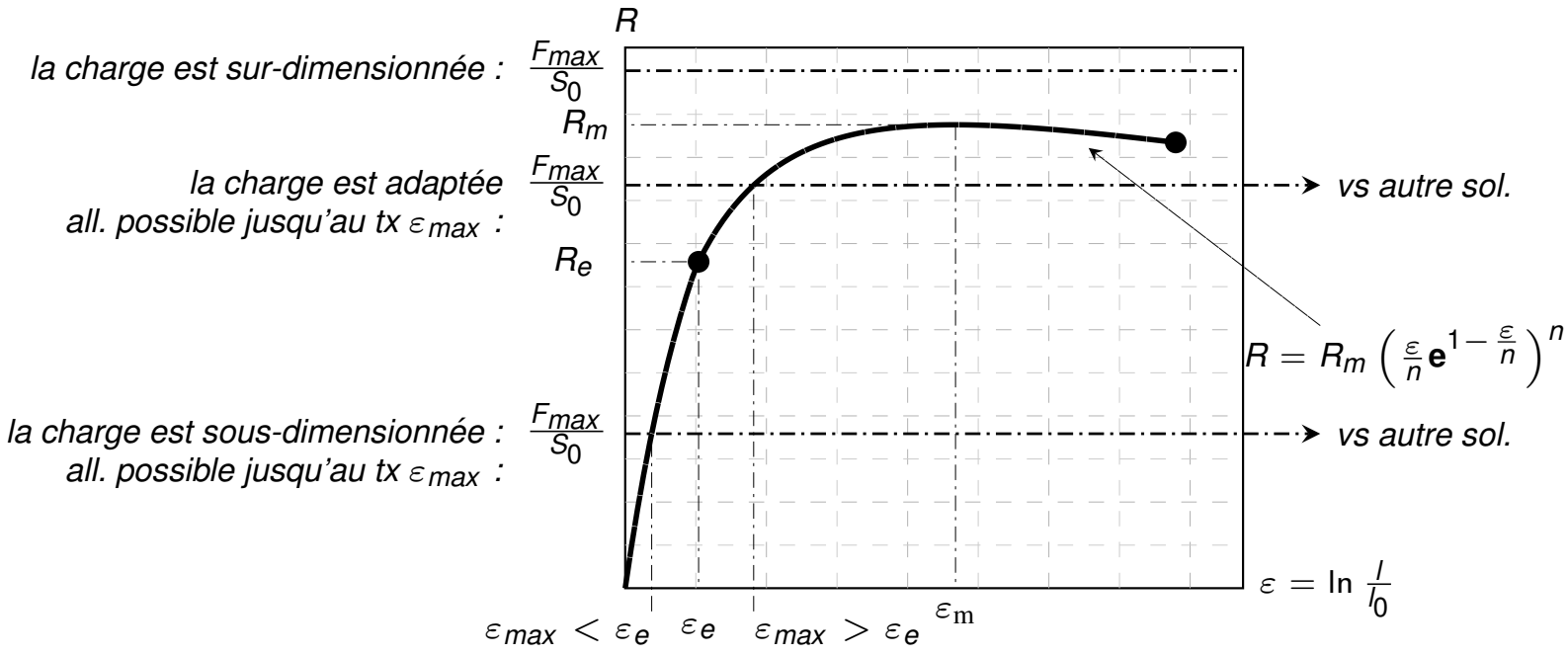


matériau (extra-)dur



matériau dur

A 16: Inversion de la fonction de traction



- *Le taux de déf. atteignable ε_{max} avec une charge adaptée F_{max} satisfait :*

$$\frac{F_{max}}{S_0} = R_m \left(\frac{\varepsilon_{max}}{n} \mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon_{max}}{n}} \right)^n . \quad \textbf{(Equation de la déformation maximale)}$$

A 17: Calcul des taux de déformation, cas plastique

- *On reçoit un matériau recuit de caractéristiques connues.*
  - *Il faut calculer le taux de déformation réel d'une barre de section* $S_0 = 150.0\,\mathrm{mm}^2$ *soumise à une force de traction de* $F = 90$ *kN.*

limite élastique	***résistance***	***coeff. Poisson***	***coeff. écr.***
$R_e = 450$ *MPa*	$R_m = 904.2$ *MPa*	$\nu = 0.400$	$n = 0.2$

Tab. 1 *Données relatives au matériau*

$\frac{F}{S_0} = 600.0$ *MPa* $\geq R_e$ ***(cas plastique)*** $\Big\downarrow$ $\alpha = \frac{1}{\mathbf{e}} \sqrt[n]{\frac{F}{R_m S_0}}$

STO	$*$	*exp*	*RCL*	0.	0	4	9	7	4	4	3	$\longrightarrow \bar{x}$

$\Big\downarrow$ $\varepsilon = n\bar{x}$

$\varepsilon = 0.0099488$

A 18: Résistance et contrainte ultime

- *Dans le cas d'un matériau fragile, la différence entre la résistance et la contrainte de traction ultime est moindre. On a généralement que* $R_m \simeq \sigma_{ult}$.

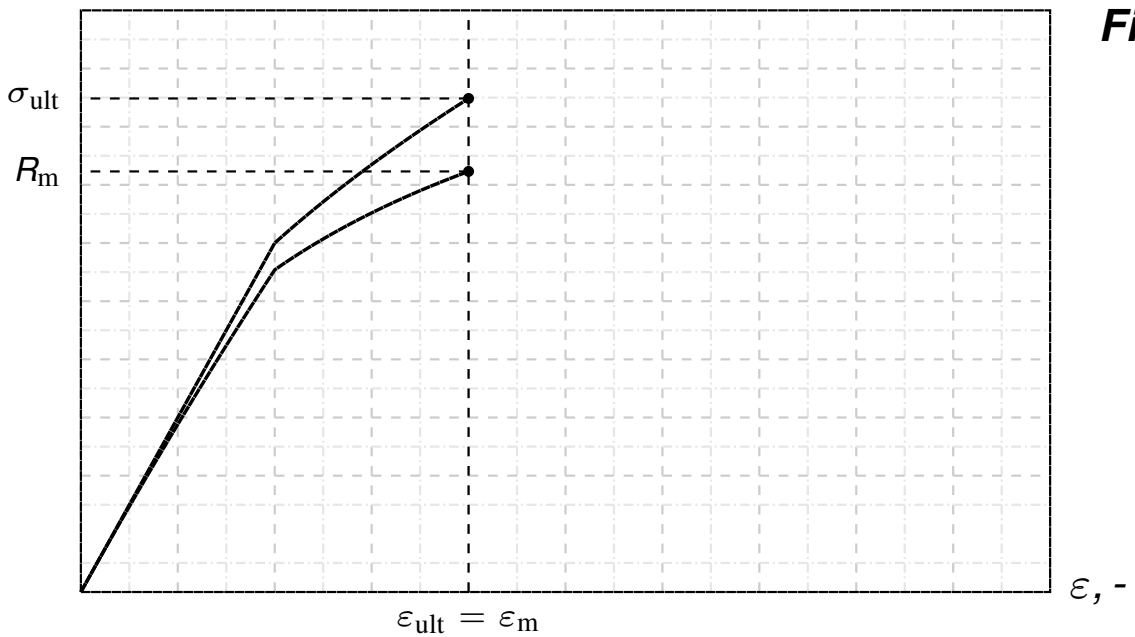
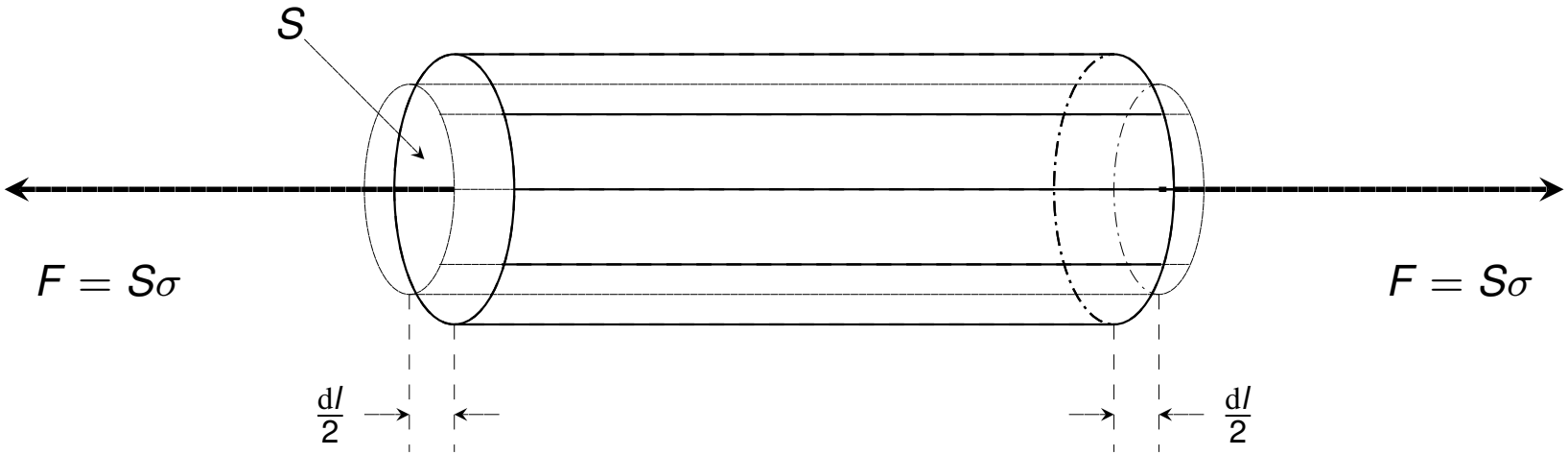


Fig. *courbes de traction, matériau fragile*

- ***N.B.*** *Pour évaluer la tenue des matériaux sous charge externes, la valeur à utiliser pour la* ***résistance ultime à la traction (UTS)*** *est* R_m, *car le calcul des forces se fait (généralement) par rapport à la* ***géométrie initale non déformée****.*

A 19: Episode de traction (allongement *dl* de l'échantillon)



- *Le travail effectué vaut*

$$dA = F\frac{dl}{2} + F\frac{dl}{2} = Fdl = S\sigma dl = Sl\sigma\frac{dl}{l}$$

- *Comme* $Sl = V$ *et que* $\frac{dl}{l} = d\varepsilon$, *on conclut que*

$$dA = V\sigma d\varepsilon$$

A 20: Energie spécifique et courbe de traction réelle

- *L'énergie spécifique de déformation $\eta = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon$, s'interprète comme l'aire sous la courbe de traction réelle.*

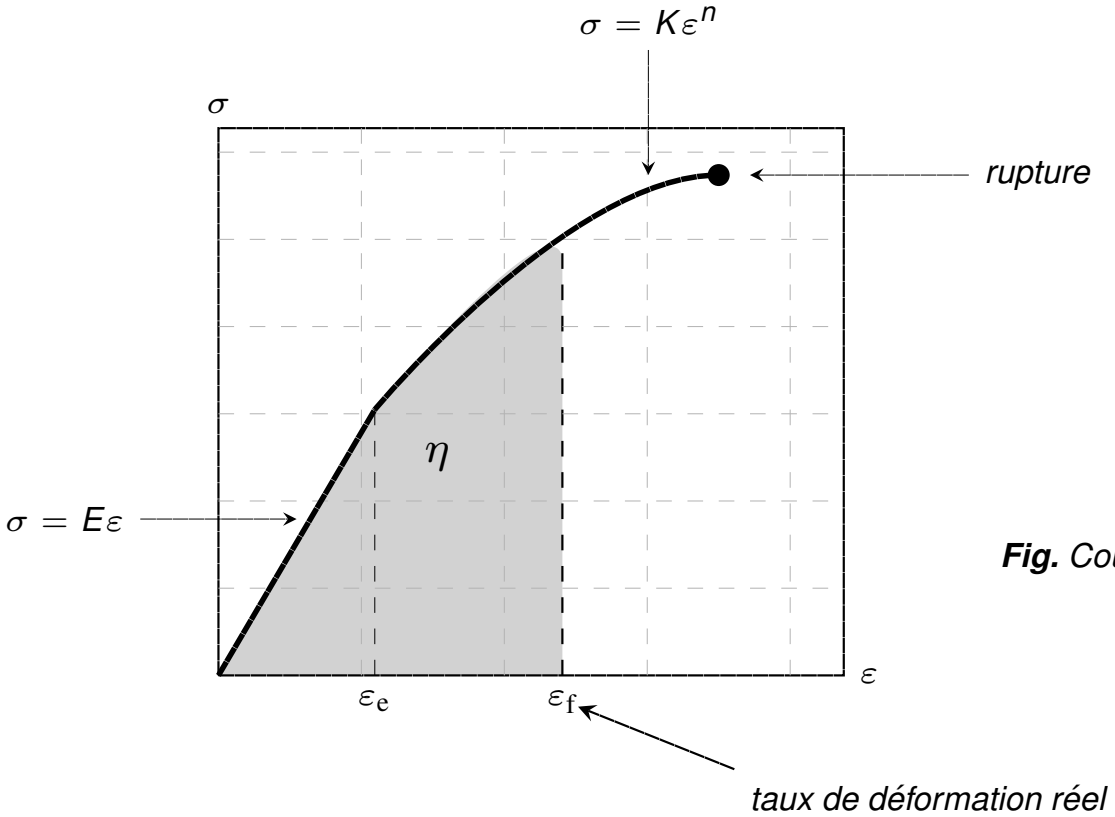
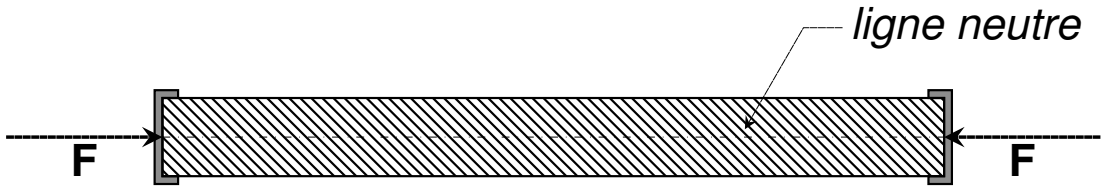


Fig. *Courbe de traction réelle*

A 21: Theorie du flambage

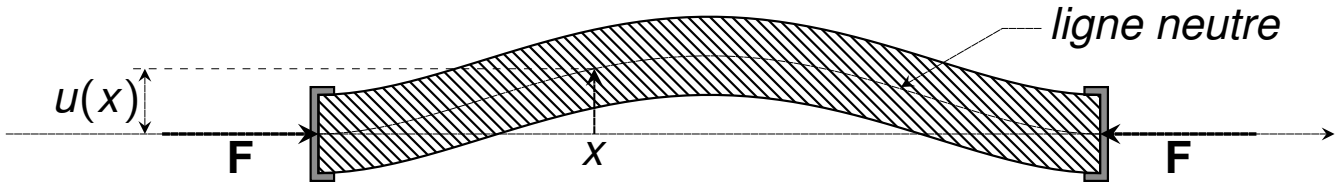
- *L'état de déformation d'un échantillon de compression (longueur l_0, section S_0) est en principe un état de compression uniforme :*



- *Si le rapport entre la contrainte nominale $R = \frac{F}{S_0}$ et le module d'Young E de la matière passe au-dessus d'un seuil :*

$$\frac{R}{E} \geq \frac{S_0}{4\pi l_0^2}$$

alors il existe d'autres configurations d'équilibre, impliquant (par exemple) des flexions



- *On appelle **flambage** la bifurcation vers ces nouveaux états de déformation.*

A 22: Matériau résistant, matériau tenace

Matériau résistant

- *ne pourra être mis en forme qu'en déployant une force importante,*



Matériau tenace

- *ne pourra être mis en forme qu'en dépensant beaucoup d'énergie,*



A 23: Propriétés mécaniques de quelques matériaux

Matériau	R_m *[MPa]*	R_e *[MPa]*	*E [GPa]*	ν	ε_{ult}
Acier ordinaire	300/1100	200/900	210	0.3	0.17
Acier hautes carac.	1100/1800	1000/1700	210	0.3	-
Acier inox. aust.	-	180/240	195	0.3	0.4
Alliages aluminium	200/600	100/500	70	0.34	0.05/0.30
Titane	650	500	110	0.34	0.35/0.55
Cuivre *(forgé)*	215/930	49/420	115/132	0.31	0.015/0.55
Laiton	159/896	69/683	97/115	0.33	0.03/0.68
Bronze	96/1010	69/793	41/137	0.31	0/0.7

A 24: Données physiques

Matériau	*n*
Acier doux (0.05%C)	0.26
Acier à haute résistance *(SAE 4340)*	0.15
Acier trempé et recuit (0.6%C)	0.15
Laiton recuit *(70Cu/30Zn)*	0.49
Laiton déformé à froid *(70Cu/30Zn)*	0.19
Nickel recuit	0.43
Nickel déformé à froid	0.07
Aluminium recuit	0.15

A 25: Données physiques

Matériau	τ_S *(ou* τ_{ult}*), MPa*
Fer	370
Acier (0.13%C)	480
Acier *(Ni-Cr-V)*	690
Acier *(austénitique inoxydable)*	630
Nickel	420
Cuivre *(recuit)*	250
Cuivre *(travaillé à froid)*	270
Laiton *(70Cu/30Zn)*	370
Aluminium	97
Magnésium	125
Plomb	36