

Procédés de Fabrication I - IGI
Chapitre 2. Propriétés Mécaniques des
Matériaux

22 octobre 2024

Programme de la première partie

1. Introduction
2. Description de l'expérience de traction uniaxiale
3. La contrainte en plasticité, Loi de Ludwik et courbe de traction réelle
4. Décharge et relaxation

2.1.1 Généralités

Observation

Dans la plupart des procédés, la mise en forme de la matière première est basée sur les déformations plastiques. Exemple :

- *formage des métaux : laminage, forgeage, extrusion, étirage,*
- *formage des feuilles : pliage, emboutissage, découpage,*
- *procédés de coupe (fraisage, perçage, décolletage).*

Conséquence

*La planification puis l'optimisation des procédés de production cités plus haut est essentiellement conditionnée par les **propriétés mécaniques (élastiques et surtout plastiques)** du matériau à usiner.*

Remarque

*Il existe d'autres procédés comme la fonderie ou l'injection dont les performances dépendent plutôt des **propriétés thermiques** du matériau à mettre en forme. Ce sujet sera traité dans le chapitre suivant.*

2.1.2 Objectifs du chapitre

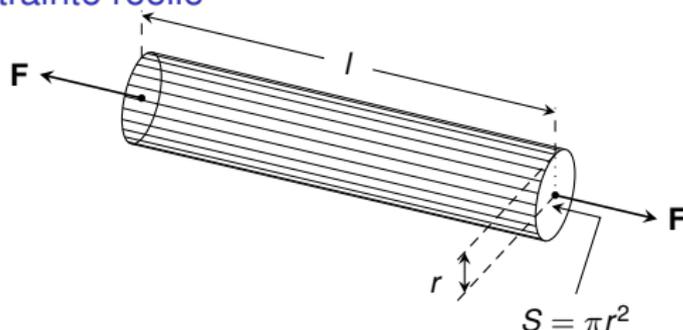
Principales propriétés mécaniques :

Nom	Symbole	Unité
<i>Le module d'élasticité</i>	E	[GPa]
<i>Le coefficient de Poisson</i>	ν	[-]
<i>Le coefficient d'érouissage</i>	n	[-]
<i>Le module d'érouissage</i>	K	[MPa]
<i>La limite élastique</i>	R_e	[MPa]
<i>La résistance à la traction</i>	R_m	[MPa]
<i>Le taux de déformation réel à la rupture</i>	ϵ_{ult}	[-]
<i>La dureté</i>	HB, HV, HK	[kg/mm ²]
...

(cf. Annexe 1)

2.2.1 Expérience de traction et contrainte

Force et contrainte réelle

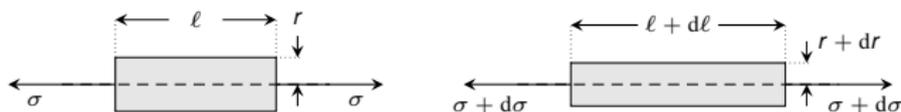


- Dans une expérience de traction on allonge un échantillon de matière en lui appliquant une force F croissante.
- La force n'est pas une bonne mesure de la façon avec laquelle on sollicite l'échantillon. Le rapport entre la force et la section courante en donne une meilleure idée.
- Ce rapport est noté σ et appelé contrainte de traction **réelle**

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{unité : MPa} \quad (1)$$

2.2.2 Lois infinitésimales

Etude d'un épisode de traction infinitésimal



- Si la contrainte de traction σ augmente d'une quantité infinitésimale $d\sigma$ la longueur ℓ et le rayon r de l'échantillon varient de $d\ell$ et respectivement dr .
- Hooke et Poisson ont observé que tant que les déformations restent élastiques, les variations relatives $d\ell/\ell$ et dr/r sont en proportion de $d\sigma$:

$$\frac{d\ell}{\ell} = \frac{1}{E} d\sigma \quad \text{(Loi de Hooke infinitésimale)} \quad (2)$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{E'} d\sigma \quad \text{(Loi de Hooke-Poisson infinitésimale).} \quad (3)$$

où $E, E' > 0$ sont les modules d'Young et de Young-Poisson. Le signe moins dans la seconde relation dit que le rayon diminue si la traction augmente.

2.2.3 Module d'Young et coefficient de Poisson

Les caractéristiques élastiques de la matière

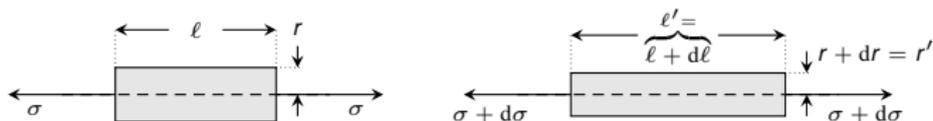
- *Le module d'Young est une caractéristique fondamentale des propriétés élastiques du matériau dont est fait l'échantillon.*
- *Le module d'Young-Poisson E' est aussi une caractéristique de l'échantillon, mais elle n'est pas très célèbre. La caractéristique qui est devenue fameuse est plutôt le rapport entre E et E' . ce rapport est noté ν et appelé **coefficient de Poisson** :*

$$\nu = \frac{E}{E'} \implies E' = \frac{E}{\nu}.$$

- *En éliminant le module d'Young-Poisson E' au profit du coefficient de Poisson, les accroissements relatifs de longueur et de rayon suscités par une augmentation élastique de contrainte de traction valent :*

$$\frac{d\ell}{\ell} = \frac{1}{E}d\sigma \quad \text{et} \quad \frac{dr}{r} = -\frac{\nu}{E}d\sigma. \quad (4)$$

2.2.4 Episode microscopique



- L'augmentation $d\sigma$ (très petite) de contrainte fait passer la longueur et le rayon de l'échantillon des valeurs l, r aux valeurs l', r' :

$$l' = l + dl = \left(1 + \frac{dl}{l}\right) l = \left(1 + \frac{1}{E}d\sigma\right) l$$

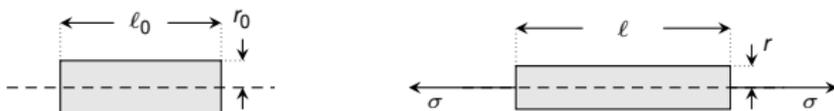
$$r' = r + dr = \left(1 + \frac{dr}{r}\right) r = \left(1 - \frac{\nu}{E}d\sigma\right) r$$

- L'effet d'une très petite augmentation de contrainte sur les longueurs et les rayons est donc multiplicatif : c'est une amplification d'un facteur > 1 pour la longueur et une réduction d'un facteur < 1 , pour le rayon

$$1 + \frac{1}{E}d\sigma \quad (\text{pr, la longu.}) \quad 1 - \frac{\nu}{E}d\sigma \quad (\text{pr, le rayon})$$

Bien sûr, ce n'est vrai que si les déformations qu'on considère sont **élastiques** !

2.2.5 Expérience macroscopique



- La mise en traction macroscopique (σ) d'un échantillon peut être décomposée en une succession de n étapes où la contrainte est augmentée de σ/n à chaque fois.
- Si n est très très grand, l'accroissement de contrainte σ/n est \simeq microscopique et, s'il est élastique, son effet sur la longueur et le rayon est multiplicatif. Au cours des épisodes, la longueur et le rayon évoluent depuis les valeurs l_0 et r_0 selon :

$$l_0 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n}\right) l_0 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n}\right)^2 l_0 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n}\right)^3 l_0 \dots$$

$$r_0 \rightarrow \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n}\right) r_0 \rightarrow \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n}\right)^2 r_0 \rightarrow \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n}\right)^3 r_0 \dots$$

- Les longueur et rayon finaux l et r , au terme des n étapes, sont donc

$$l = \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n}\right)^n l_0 \quad \text{et} \quad r = \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n}\right)^n r_0.$$

2.2.6 Expérience macroscopique (suite)

Des formules additives à la place de multiplicatives

- *Les formules qu'on vient d'obtenir pour ℓ et r sont malheureusement inexploitable. Puisque le paramètre n doit être le plus grand possible, elles reviennent à mettre à une puissance très grande un nombre qui vaut presque 1 :*

$$1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n}$$

- *Pour résoudre ce problème il vaut la peine de calculer le logarithme de ℓ et de r . Puisque le logarithme transforme les multiplications en additions, les formules multiplicatives pour ℓ et r deviendront des formules additives pour $\ln \ell$ et $\ln r$:*

$$\ln \ell = \ln \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n} \right)^n \ell_0 = \ln \ell_0 + n \ln \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n} \right) \quad (5)$$

$$\ln r = \ln \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n} \right)^n r_0 = \ln r_0 + n \ln \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n} \right) \quad (6)$$

2.2.7 Expérience macroscopique (fin)

Utilisation des propriétés des logarithmes

- Les logarithmes en facteur de n sont faciles à calculer car l'argument est de la forme $1 + x$ avec x très petit et $\ln(1 + x) \simeq x$ dans ce cas. En utilisant cette règle on trouve :

$$\ln \ell = \ln \ell_0 + n \ln \left(1 + \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n} \right) = \ln \ell_0 + n \frac{1}{E} \frac{\sigma}{n} = \ln \ell_0 + \frac{1}{E} \sigma \quad (7)$$

$$\ln r = \ln r_0 - n \ln \left(1 - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n} \right) = \ln r_0 - n \frac{\nu}{E} \frac{\sigma}{n} = \ln r_0 - \frac{\nu}{E} \sigma \quad (8)$$

- On utilise l'équation (7) pour exprimer σ :

$$\sigma = E(\ln \ell - \ln \ell_0) = E \ln \frac{\ell}{\ell_0}. \quad (9)$$

- On peut ensuite mettre en relation les variations de rayon avec celles de longueur en substituant la valeur (9) de σ dans l'équation (8) :

$$\ln r - \ln r_0 = -\frac{\nu}{E} E \ln \frac{\ell}{\ell_0} \implies \ln \frac{r}{r_0} = -\frac{\nu}{E} E \ln \frac{\ell}{\ell_0} = -\nu \ln \frac{\ell}{\ell_0}. \quad (10)$$

2.2.8 Lois de Hooke et de Poisson

le taux de déformation réel

- Les équations (9) et (10) font intervenir le logarithme du rapport entre les longueurs finale et initiale. Cette quantité est une mesure de la déformation. On lui donne un nom, **taux de déformation réel**, et on la note ε :

$$\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0}. \quad (11)$$

- Avec cette notation la formule (9) devient donc

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{si } 0 < \varepsilon < \varepsilon_e \quad (\text{Loi de Hooke}) \quad (12)$$

et la formule (10) :

$$\ln \frac{r}{r_0} = -\nu\varepsilon$$

soit, en résolvant pour r/r_0 :

$$\frac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon}, \quad \text{si } 0 < \varepsilon < \varepsilon_e. \quad (\text{Loi de Poisson}) \quad (13)$$

2.2.9 Taux de déformation réel en limite élastique

Intervalle de validité des lois de Hooke et de Poisson

- On prendra note que les lois de Hooke (12) et de Poisson (13) ne sont valables que si

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_e$$

où ε_e est le taux réel en deçà duquel les déformations sont **élastiques** et au delà duquel elles sont **plastiques**. cela veut dire que si $\varepsilon < \varepsilon_e$ alors l'échantillon reprend sa forme initiale (longueur ℓ_0 , rayon r_0) si on relaxe la force. En revanche, si $\varepsilon > \varepsilon_e$ alors l'échantillon va garder une déformation **permanente** après la relaxation.

- On appelle ε_e taux de déformation réel en limite élastique. Cette quantité est une caractéristique du matériau dont est fait l'échantillon mais pas seulement. Elle dépend de l'historique de déformation et peut être modifiée mécaniquement, c'est le phénomène d'écrouissage dont nous parlerons plus tard.



Thomas Young, 1773-1829



Siméon Poisson, 1781-1840)



Robert Hooke, 1635-1703)

2.2.10 Lois de Poisson

Variation de la section et du volume

- La loi de Poisson (13) donne le rapport des rayons en fonction du taux de déformation réel :

$$\frac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e$$

- Mais si le rapport des rayons est connu, celui des sections est facile à calculer et, comme le rapport des longueurs est lié de façon simple à ε : $l/l_0 = \mathbf{e}^\varepsilon$, on peut trouver le rapport des volumes :

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e, \quad (14)$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{S}{S_0} \frac{l}{l_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e. \quad (15)$$

- C'est en fait les trois relations (13)-(15) ensemble qu'on appelle lois de Poisson. On soulignera encore que leur domaine de validité est celui de l'élasticité ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e$).

2.2.11 Contrainte sur le coefficient de Poisson

Croissance des volumes

- Lors de l'expérience de traction, longueur et volume augmentent simultanément. Cette remarque contraint les valeurs possibles du coefficient de Poisson ν intervenant dans la loi (15) :

$$\frac{V}{V_0} = e^{(1-2\nu)\varepsilon}.$$

Il faut que $V/V_0 > 1$ si $\varepsilon > 0$ donc que

$$\nu \leq 0.5 \tag{16}$$

- Si $\nu = \frac{1}{2}$, le volume reste cst. ($V = V_0$), l'échantillon est dit **incompressible**.
- Notons que ν n'est pas forcément positif. Il existe des (méta-)matériaux à coefficient de Poisson $\nu < 0$ (matériaux auxétiques), ceux là augmentent de rayon durant l'expérience de traction (13) :

$$\frac{r}{r_0} = e^{-\nu\varepsilon} > 1 \quad \text{si} \quad \varepsilon > 0.$$

2.2.12 Une mesure alternative de la déformation

Le taux de déformation nominal

- *Le taux de déformation réel $\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$ n'est pas la seule façon de mesurer la déformation. On peut aussi utiliser le taux de déformation nominal :*

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (17)$$

que vous connaissez sans doute.

- *Dans le cas des petites déformations, ces deux taux coïncident :*

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + l - l_0}{l_0} = \ln \left(1 + \frac{l - l_0}{l_0} \right) = \ln(1 + e)$$

donc

$$\varepsilon \approx e, \text{ si } e < 0.05$$

2.2.13 La loi de Hooke linéarisée

- Vous avez peut-être vu la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ avec le taux nominal e à la place du taux réel ε :

$$\sigma = Ee, e \leq e_e \quad (\text{loi de Hooke linéarisée})$$

- Comme $e \neq \varepsilon$, cette nouvelle loi ne peut être vraie qu'asymptotiquement lorsque e est très petit (car alors $\varepsilon \approx e$). On l'appelle loi de Hooke linéarisée.
- Elle a un intérêt calculatoire : elle évite l'extraction d'un logarithme pour calculer le taux de déformation lorsque ℓ_0, ℓ sont connus.
- Mais on verra qu'elle conduit à des prédictions aberrantes comme une **diminution de la déformabilité** de la matière sous précontraintes (cf.exos).
- On peut montrer que le taux nominal est **toujours** supérieur au taux réel :

$$e > \varepsilon.$$

La loi de Hooke linéarisée **surestime** donc systématiquement la contrainte réelle σ qu'il faut appliquer pour atteindre une déformation donnée.

2.3.1 Exemple de loi d'écroutissement - Loi de Ludwik

Zone plastique et loi d'écroutissement

- La loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ n'est plus valable si ε excède ε_e (**plasticité**).
- La **loi d'écroutissement** donne le rapport entre σ et ε dans la zone plastique.

Loi de Ludwik

- Pour toute une classe de matériaux **revenus**, cette relation peut être

$$\sigma = K\varepsilon^n, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_e \quad (\text{Ludwik})$$

où n est le **coefficient d'écroutissement** et K le module d'écroutissement, **unité** :
[K] = GPa.

- Le module d'écroutissement K est ajustée pour que les lois de Hooke et de Ludwik coïncident en $\varepsilon = \varepsilon_e$:

$$K = E\varepsilon_e^{1-n}. \quad (18)$$

2.3.2 Bornes pour le coefficient d'écroutissement

Règle générale

- Pour des raisons thermodynamiques (cf. exercices), on a que

$$0 < n < 1.$$

Discussion des valeurs possibles de n

- Le cas limite $n = 0$ correspond à un matériau au comportement **plastique idéal**. Dans ce cas $\sigma = c^{ste}$ au delà de la limite élastique

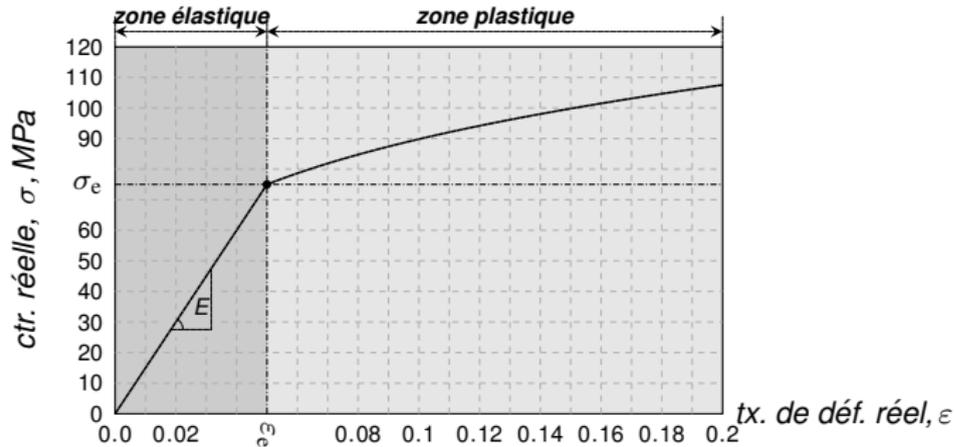
$$n_{or} \simeq 0.$$

- Pour les matériaux réels, $n > 0$ et la contrainte σ croît avec ε . Si $n \simeq 1$, plus on le déforme plus le matériau est dur à travailler (**écroutissement par augmentation de la densité de dislocations**)

$$n_{cuivre} \simeq 1.$$

2.3.3 Courbe de traction et limite élastique réelle

La contrainte en fonction de l'allongement



- La quantité $\sigma_e = E\epsilon_e$ est la **limite élastique réelle du matériau**. Si la contrainte de traction appliquée excède cette limite, le matériau subit une déformation permanente. Cet état est celui recherché dans les processus de **formage** (forgeage, laminage, ...). Les forces mises en jeu par ces procédés amèneront le niveau de contrainte au-delà de la valeur σ_e . Cela justifie l'importance de la partie plastique de la courbe de traction dans ce cours.

2.3.4 Limite élastique réelle

Interprétation microscopique et augmentation

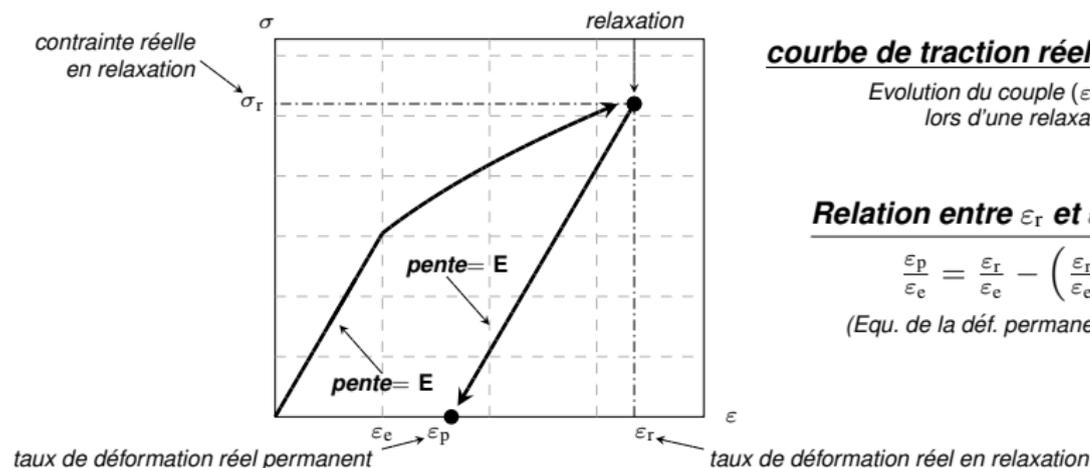
- *La quantité σ_e correspond au niveau de traction uniaxiale à partir duquel les dislocations se mettent à bouger (écoulement du matériau).*
 - *Il faut souligner que seules des contraintes de **cisaillement** peuvent mobiliser des dislocations. Or un état de traction uniaxiale implique que certains plans sont sollicités en cisaillement !*
- *On peut augmenter la limite élastique réelle σ_e (donc la **dureté** du matériau à laquelle elle est liée)*
 - *en accroissant la densité de dislocation car les dislocations gênent leurs mouvements mutuels (phénomène d'**écrouissage**),*
 - *en **raffinant** la microstructure du matériau pour augmenter les joints de grains qui eux aussi gênent le mouvement des dislocations,*
 - *en ajoutant des impuretés pour **bloquer** les dislocations (durcissement par ajout d'éléments d'alliage).*

(cf. Annexes 3, 5)

2.4.1 Relaxation

Déformation permanente

- Dans l'exp. de traction, on appelle **relaxation** le fait de laisser revenir la force (donc la contrainte réelle) à zéro.
- On observe que le point (ε, σ) représentatif de l'état de l'échantillon retourne sur l'axe $\sigma = 0$ en **ligne droite**. Cette ligne droite est parallèle à la montée élastique, sa pente est donc **exactement** égale au module d'Young E .
- Elle rejoint l'axe $\sigma = 0$ en l'abscisse ε_p : le taux de déformation réel permanent.



courbe de traction réelle :

Evolution du couple (ε, σ)
lors d'une relaxation.

Relation entre ε_r et ε_p :

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_c} \right)^n$$

(Equ. de la déf. permanente)

2.4.2 Ecrouissage

Définition

- Une pièce ayant subi une traction jusqu'en zone plastique est dite **écrouie**.
- Si l'échantillon écroui subit une nouvelle exp. de traction, il revient à l'état de relaxation de façon **élastique** puis son point représentatif dans le plan (ϵ, σ) dessine la courbe qu'il aurait dessinée si la relaxation n'avait pas eu lieu.

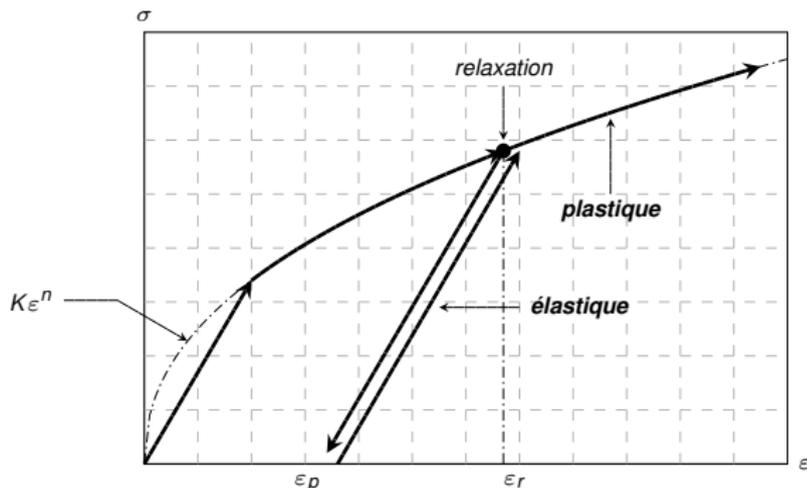


Fig.9 Reprise de l'exp. de traction après relaxation.

2.4.3 Contrainte de traction ultime

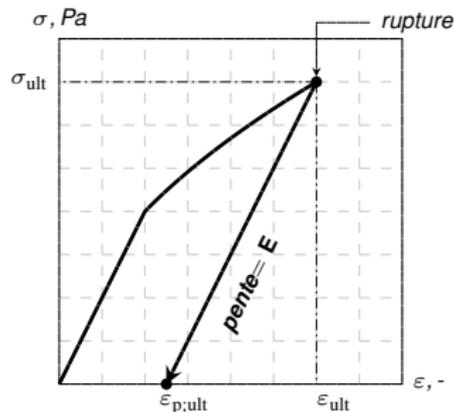
Rupture et déformation permanente maximale

- Dans une expérience de traction, il existe un taux de déformation réel ε_{ult} , appelé **taux de déformation réel en rupture**, à partir duquel l'échantillon se casse. La contrainte réelle mesurée à ce moment-là est la **contrainte de traction ultime (réelle)**. Elle est notée σ_{ult} .
- Depuis la situation de rupture, la relaxation amène l'échantillon à un état de déformation permanente caractérisé par le taux réel :

$$\varepsilon_{\text{p;ult}} = \varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_e^{1-n} \varepsilon_{\text{ult}}^n \quad (19)$$

- Le taux $\varepsilon_{\text{p;ult}}$ est ainsi le **plus grand taux de déformation** qu'on peut induire de façon **permanente** dans un échantillon !

ATTENTION : Il ne faut pas confondre la contrainte de traction ultime σ_{ult} et la résistance R_m qui sera introduite au trspt. 2.6.1 et qui représente la force maximale qu'un échantillon de traction de section initiale unité peut supporter sans rompre (cf. trspt. 2.6.3).



Programme de la seconde partie

5. Variation des dimensions latérales en plasticité
6. La force de traction et la contrainte nominale
7. L'inversion de la fonction de traction, applications

2.5.1 Variation des dimensions latérales en plasticité

Théorie de Hencky et Considère

- *En régime élastique, les variations des dimensions latérales et du volume de l'échantillon obéissent aux lois de Poisson (13), (14) et (15) :*

$$r = r_0 e^{-\nu \varepsilon}$$

$$S = S_0 e^{-2\nu \varepsilon}$$

$$V = V_0 e^{(1-2\nu)\varepsilon}$$

- *En régime plastique et à l'instar de la loi de Hooke (12), ces lois ne sont plus valables.*
- *Elles vont être remplacées par les équations de Considère (ou de Hencky dans certains cas).*



Armand Considère
(1841-1914)



Heinrich Hencky
(1885-1951)

2.5.2 Rapport entre les propriétés géométriques

Plasticité-Théorie de Considère

- *La théorie de Considère repose sur l'hypothèse que le volume de l'échantillon ne change plus dès lors qu'il a atteint la plasticité, autrement dit :*

$$V = V_e, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_e, \quad (20)$$

avec $V_e = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e} V_0$, le volume en limite élastique (15).

- *La conclusion de (20) est que*

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V_e}{V_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e}, \quad \varepsilon > \varepsilon_e \quad (21)$$

$$\frac{S}{S_0} = \frac{V}{V_0} \times \frac{l_0}{l} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon} \quad \varepsilon > \varepsilon_e \quad (22)$$

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{S}{S_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{e}^{(\frac{1}{2}-\nu)\varepsilon_e - \frac{1}{2}\varepsilon}, \quad \varepsilon > \varepsilon_e \quad (23)$$



Armand Considère
(1841-1914)

2.5.3 Rapport entre les propriétés géométriques

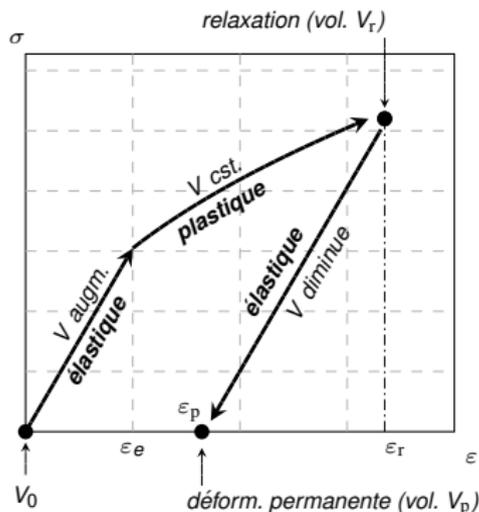
Inconsistance de la Théorie de Considère

- Dans les faits, la Théorie de Considère est inconsistante. En effet, elle prédit qu'un échantillon soumis à un cycle écrouissage-relaxation diminue de volume (cf. exos) :

$$V_p < V_0.$$

et même que l'échantillon disparaît si on répète ce cycle indéfiniment :

$$V_0 \rightarrow 0.$$

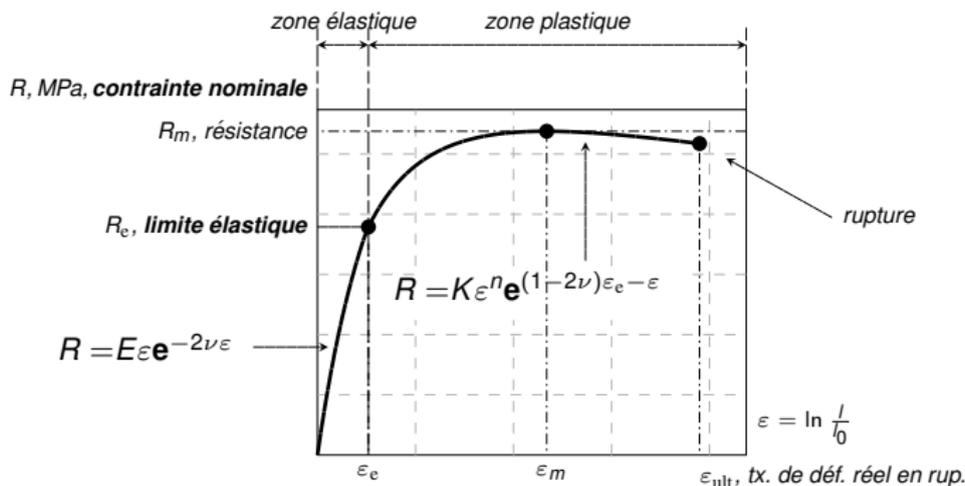


- Il faudrait remplacer les rel. (21)-(23) par des équations qui prédisent qu'un cycle écrouissage-relaxation **conserve** le volume de l'échantillon $V_p = V_0$.
- Ces équations sont celles de Hencky. Elles sont plus compliquées que celles de Considère or, pour un matériau standard ($n \simeq 0$ et $\nu \simeq \frac{1}{2}$), elles prédisent des comportements très voisins. En pratique, on appliquera donc (21)-(23).

2.6.1 Force et courbe de traction

Contrainte nominale pour un matériau revenu (appr. de Considère)

- Les lois (Hooke, **Ludwik**¹, Poisson, Considère) donnent σ et S en fonction de ε et S_0 : $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ et $S = S_0 s(\varepsilon)$ avec $s(\varepsilon) = e^{-2\nu\varepsilon}$ ou bien $s(\varepsilon) = e^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon}$.
- La force de traction $F = \sigma S$ est donc proportionnelle à S_0 : $F = S_0 [\sigma(\varepsilon)s(\varepsilon)]$.
- Le rapport $R = F/S_0$ est appelé contrainte nominale : $R = \sigma(\varepsilon)s(\varepsilon)$



(cf. Annexes 7, 8, 9)

1. La situation obtenue avec d'autres lois d'érouissage (e.g. Swift) sera traitée en exercice.

2.6.2 Courbe de traction et résistance

La valeur de la résistance dépend de la localisation de n et ε_e

- (1) **(Cas général)** Si $\varepsilon_e < n \leq \varepsilon_{ult}$, alors la résistance est atteinte en phase d'écroutissage (cf. trspt. 2.6.1). Pour un matériau revenu et sous l'hyp. de Considère :

$$\varepsilon_m = n; \quad R_m = K \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{(1-2\nu)\varepsilon_e}.$$

- (2) **(Cas matériau fragile)** Si $n > \varepsilon_{ult}$ alors la résistance est atteinte à la **rupture**. Si on applique l'hypothèse de Considère et qu'on désigne par σ_{ult} la contrainte de traction ultime réelle, on a

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{ult}; \quad R_m = R(\varepsilon_{ult}) = \sigma_{ult} e^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon_{ult}}$$

- (3) **(Cas matériau dur)** Si $n < \varepsilon_e$ alors la résistance est atteinte en **zone élastique** :

$$\begin{aligned} \text{si } \varepsilon_e < \frac{1}{2\nu} : \quad & \varepsilon_m = \varepsilon_e; \quad R_m = R_e, \\ \text{si } \varepsilon_e \geq \frac{1}{2\nu} : \quad & \varepsilon_m = \frac{1}{2\nu}; \quad R_m = \frac{E}{2\nu e}. \end{aligned}$$

(cf. Annexes 10, 12)

2.6.3 Résistance et contrainte de traction ultime

Résistance et contrainte de traction ultime

- La résistance R_m est la **force maximale** qu'un échantillon de traction de section initiale unité peut supporter. Cette quantité se lit sur la **courbe de traction**. Il ne faut pas confondre R_m avec la contrainte de traction ultime σ_{ult} (cf. trspt. 2.4.3) qui correspond à la **contrainte de traction réelle** qu'on mesure au moment de la rupture. Cette quantité se lit sur la **courbe de traction réelle**. A cause de la diminution des dimensions latérales (Poisson), on a toujours que

$$\sigma_{ult} > R_m.$$

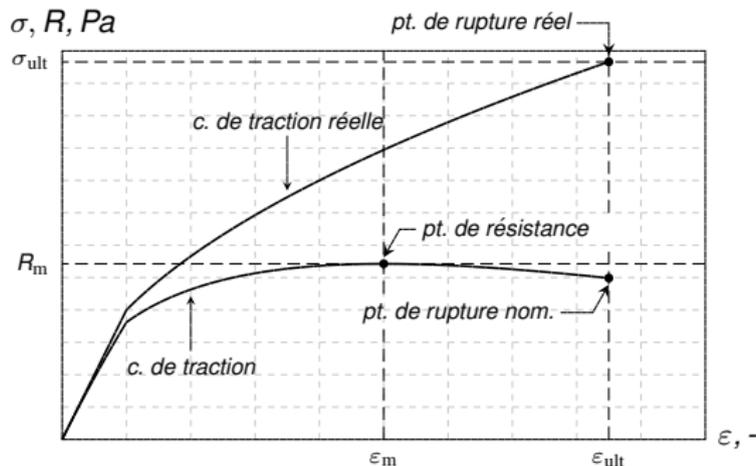


Fig. courbes de traction, matériau ductile

2.6.4 Fonction de traction

Fonction de traction (avec l'approximation de Considère)

- *Le module d'érouissage est lié à la résistance. Pour un matériau revenu, on a*

$$K = R_m \left(\frac{\mathbf{e}}{n} \right)^n \mathbf{e}^{-(1-2\nu)\varepsilon_e}$$

- *Pour un matériau revenu, on obtient ainsi une expression simple de la contrainte nominale*

$$R = \begin{cases} E\varepsilon \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}, & \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ R_m \left(\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon}{n}} \right)^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_e \end{cases}$$

Utilisation de la fonction de traction

- *La fonction de traction permet de calculer la **force de traction** F nécessaire à atteindre un **taux de déformation** ε connu.*
- *Pour calculer le **taux de déformation** ε qu'on atteint lorsque la **force de traction** F est imposée, il faut inverser la fonction de traction.*

2.7.1 Inversion de la fonction de traction (cas général)

Trois cas se présentent :

- (1) **Cas élastique** : Si $F/S_0 \leq R_e$, l'équation à résoudre est

$$\frac{F}{S_0} = E\varepsilon e^{-2\nu\varepsilon}.$$

- (2) **Cas plastique** : Si $R_e < F/S_0 < R_m$, l'équation à résoudre pour un matériau revenu et sous l'hypothèse de Considère, est

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left(\frac{\varepsilon}{n} e^{1-\frac{\varepsilon}{n}} \right)^n.$$

- (3) **Cas de rupture** : Si $F/S_0 > R_m$, la déformation peut être menée jusqu'à la rupture :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ult}}$$

2.7.2 Inversion de la fonc. de traction, (cas plastique)

Observation

- Même sous l'hypothèse de Considère, l'équation à résoudre est **transcendante**. dans le cas d'un matériau revenu, cette équation est :

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left(\frac{\varepsilon}{n} e^{1 - \frac{\varepsilon}{n}} \right)^n.$$

Méthode de résolution pour trouver $\varepsilon < n$

- On pose $\alpha = \frac{1}{e} \sqrt[n]{\frac{F}{R_m S_0}}$.
- A partir de la condition initiale $x_0 = \alpha$, on effectue l'itération de pt. fixe

$$x_{m+1} = \alpha e^{x_m}, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

- On appelle \bar{x} sa limite et on trouve le taux de déformation réel ($\varepsilon < n \equiv \varepsilon_m$)

$$\varepsilon = n\bar{x}$$

Programme de la troisième partie

8. Energie de déformation

9. L'expérience de dureté

10. L'expérience de compression

2.8.1 Energie spécifique de déformation

Travail et énergie spécifique

- Le travail fourni sur un épisode de l'expérience de traction est

$$dA = S\sigma dl \implies dA = V\sigma d\varepsilon.$$

- Le travail total pour amener l'échantillon au taux de déformation réel ε_f vaut :

$$A = \int_0^{\varepsilon_f} V\sigma d\varepsilon$$

- Si le matériau est **incompressible** alors $V = V_0$ et

$$A = V_0 \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon = V_0 \eta$$

$$\text{où } \eta = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \quad (\text{énergie spécifique de déformation})$$

- Pour un matériau général, $V_0\eta$ est une **sous-estimation** du travail A .
- Pour un matériau général, $V_f\eta$ est une **sur-estimation** du travail A .

2.8.2 Ténacité

Définition de la ténacité

La **ténacité** T est l'énergie spécifique de déformation jusqu'en rupture :

$$T = \int_0^{\varepsilon_{\text{ult}}} \sigma d\varepsilon$$

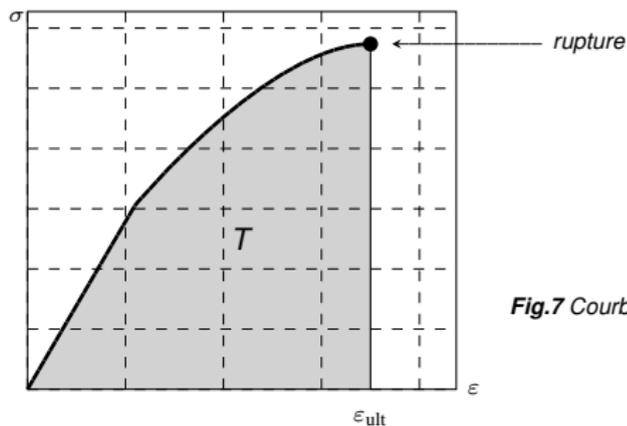


Fig.7 Courbe de traction réelle

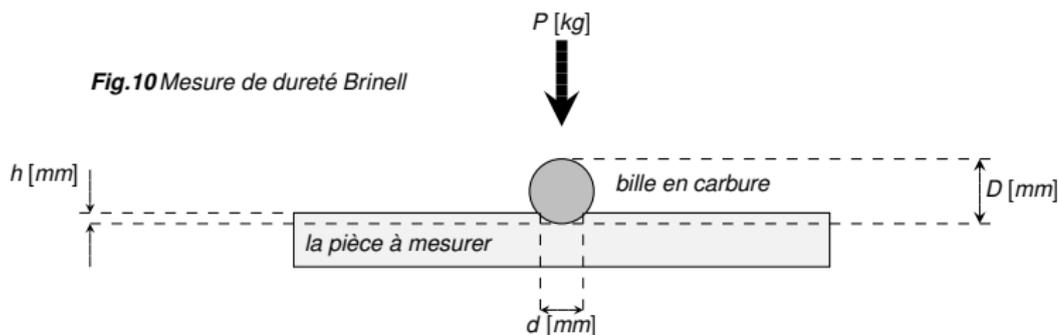
(cf. Annexe 20)

2.9.1 L'expérience de dureté

Définition

- La dureté est une mesure hybride corrélée à la limite élastique mais aussi à l'usure.
- Les mesures de dureté standardisées sont nombreuses (Brinell, Vickers, Rockwell). Elles sont en principe simples et non destructives.
- La mesure la plus classique est due à Brinell (dureté HB).

Fig.10 Mesure de dureté Brinell



$$HB = \frac{\text{charge en [kg]}}{\text{surface de l'empreinte en [mm}^2\text{]}} = \frac{P}{\pi Dh} = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

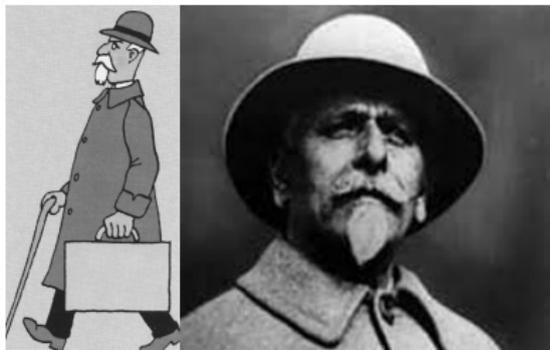
2.9.2 Dureté et Limite élastique.

Observation empirique

- *Il existe une relation approximative entre la dureté et la limite élastique.*
- *Lorsque l'on donne HB en unité de $[kg/mm^2]$, on peut approcher R_e en unité de $[MPa]$ grâce aux formules :*
 - $R_e \simeq 3.5HB$, pour des matériaux écrouis,
 - $R_e \simeq 2.0HB$, pour des matériaux recuits.



J.A. Brinell (1849-1925)



M. Bazaroff
Ds "L'oreille cassée"

Basil Zaharoff (1849-1936)
former CEO of Vickers Ltd

2.10.2 L'expérience de compression (suite)

Loi de Poisson et de Considère en compression

- Les lois de Poisson et de Considère se maintiennent avec la même valeur du coefficient de Poisson ν que pour la traction.

Situation	$\varepsilon \leq \varepsilon_{e;c}$ (élasticité)	$\varepsilon > \varepsilon_{e;c}$ (plasticité)
$\frac{r}{r_0}$	$e^{-\nu\varepsilon}$	$e^{(\frac{1}{2}-\nu)\varepsilon_{e;c}-\frac{1}{2}\varepsilon}$
$\frac{S}{S_0}$	$e^{-2\nu\varepsilon}$	$e^{(1-2\nu)\varepsilon_{e;c}-\varepsilon}$
$\frac{V}{V_0}$	$e^{(1-2\nu)\varepsilon}$	$e^{(1-2\nu)\varepsilon_{e;c}}$

- Il faut noter que les taux de déformations ε et $\varepsilon_{e;c}$ sont **négatifs**.
- Les formules ci-dessus prévoient donc des **augmentations** de rayon et de section mais des **diminutions** de volume (car $\nu \leq \frac{1}{2}$).
- L'hypothèse de Considère est toujours inconsistante puisqu'elle prédit une augmentation plastique du volume après rebond. Cependant, pour la plupart des matériaux, elle donne lieu à de bonnes sur-estimations de la réalité (formule de Hencky).

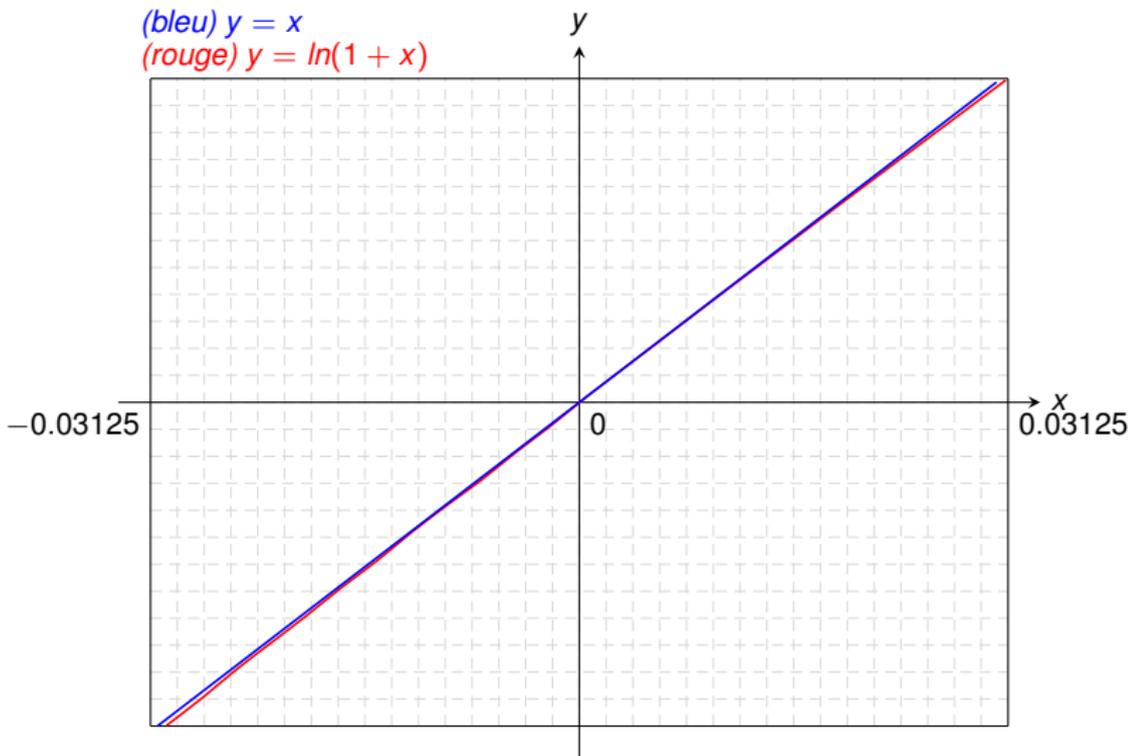
ANNEXES, TABLES ET BIBLIOGRAPHIE

A 1: Terminologie anglaise

Glossaire des concepts importants en anglais

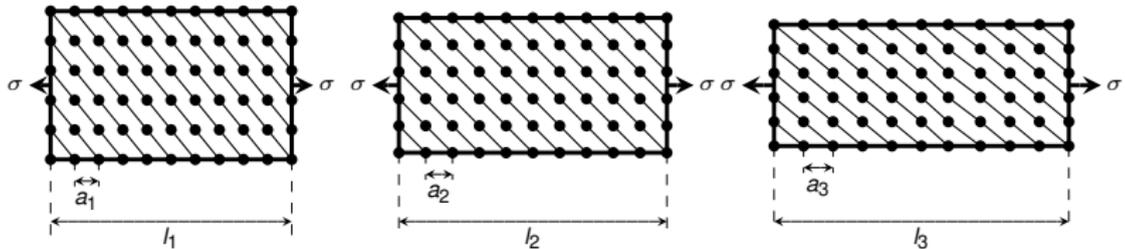
<i>Français</i>	<i>Anglais</i>
<i>Taux de déformation :.....</i>	<i>Real strain</i>
<i>Taux de déformation nominal : .</i>	<i>Engineering strain</i>
<i>Contrainte (réel, nominale) :....</i>	<i>(Real, engineering) stress</i>
<i>Essai de traction :.....</i>	<i>Tensile test</i>
<i>Courbe de traction :.....</i>	<i>Tensile curve</i>
<i>Essai de compression :.....</i>	<i>Compressive test</i>
<i>Essai de cisaillement :.....</i>	<i>Shear test</i>
<i>Limite élastique :.....</i>	<i>Yield (tensile) strength</i>
<i>Résistance :.....</i>	<i>Ultimate (tensile) strength</i>
<i>Dureté :.....</i>	<i>Hardness</i>
<i>Ténacité :.....</i>	<i>Tenacity</i>
<i>Module d'élasticité :.....</i>	<i>Elasticity modulus</i>
<i>Module de cisaillement :.....</i>	<i>Shear modulus</i>
<i>Coefficient de Poisson :.....</i>	<i>Poisson ratio</i>
<i>Ecrouissage :.....</i>	<i>(Work or strain) hardening</i>
<i>Dislocation :.....</i>	<i>Dislocation</i>

A 2: Comparaison entre $y = x$ et $y = \ln(1 + x)$

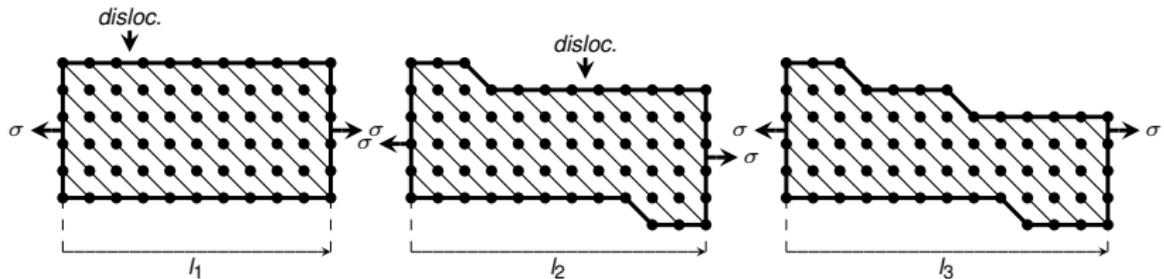


A 3: Mobilisation des dislocations

Elasticité ($\sigma < \sigma_e$) : modification des paramètres de maille

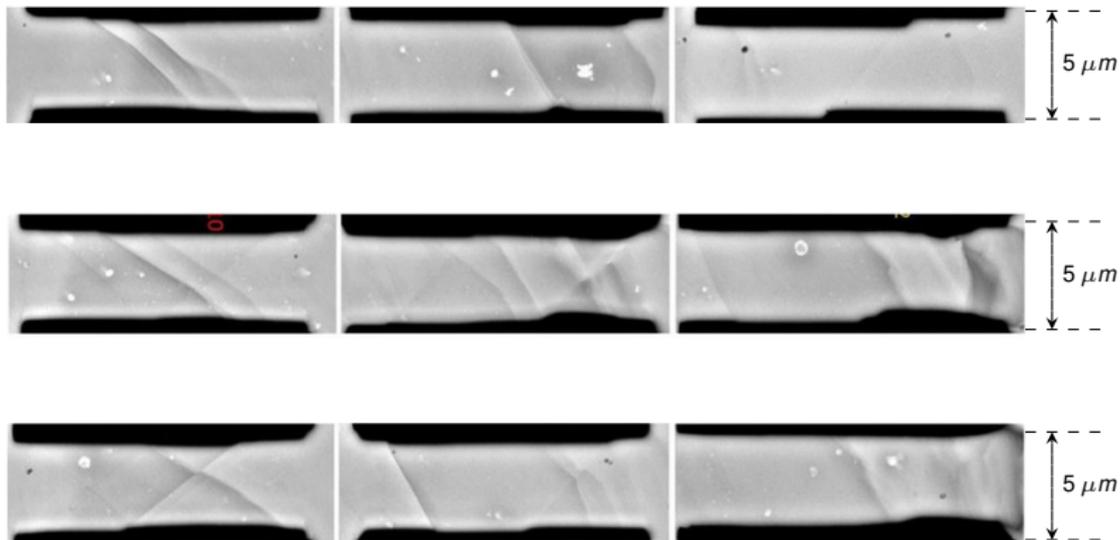


Plasticité ($\sigma > \sigma_e$) : création et mouvement de dislocations



A 4: Déformation plastiques

Observation TEM de micro-spécimens de traction

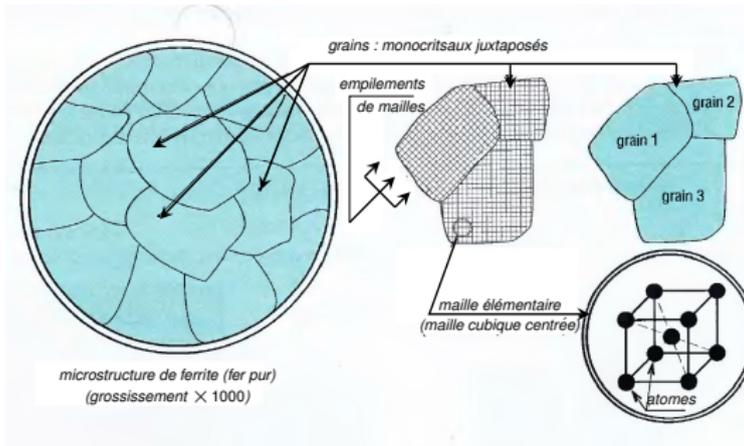


source : Hu, Zuqi et al., *Microstructure Formation and Micropillar Compression of Al-TiC Nanocomposite Manufactured by Solidification Nanoprocessing*, *Metallurgical and Materials Transactions A*, 08.2019

A 5: Microstructures et grains

Grains, monocristaux et mailles

- Les métaux sont formés de monocristaux ou **grains** placés côte à côte et de forme polygonale plus ou moins régulière.
- A l'intérieur d'un grain, les atomes sont disposés de façons périodiques. La structure répétée périodiquement est appelée **maille** (e.g. maille cubique centré, maille cubique face centrée).



- Les traitements thermiques sont susceptibles de modifier la microstructure (i.e la taille et la morphologie des grains).

A 6: Courbe de traction réelles pour diff. val. de n

Exemples de courbes de traction réelles

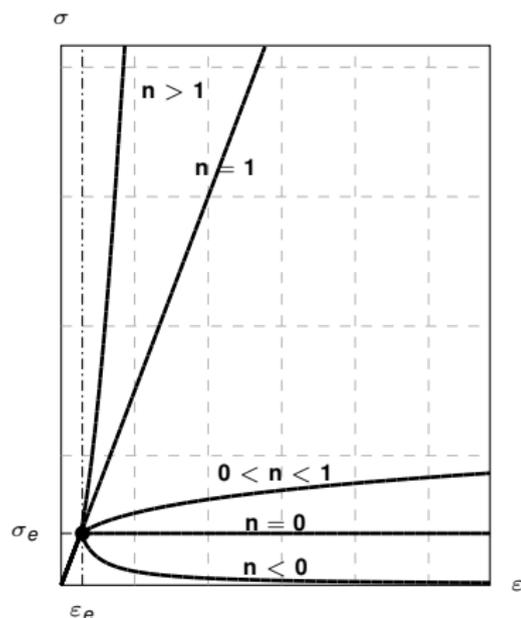


Fig. Courbe de traction réelle

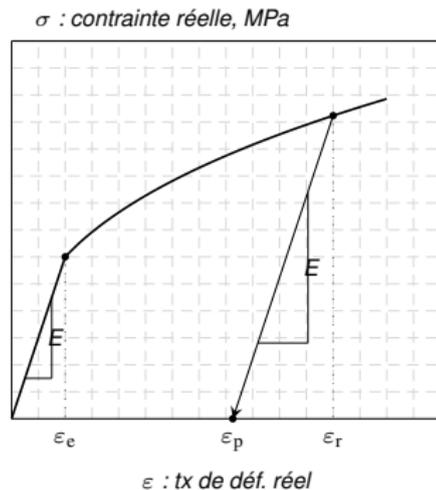
A 7: Valeurs nominales et valeurs réelles

	<i>réel</i>	<i>nominal</i>
taux de déformation	$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$	$e = \frac{l-l_0}{l_0}$
contrainte	$\sigma = \frac{F}{S}$	$R = \frac{F}{S_0}$

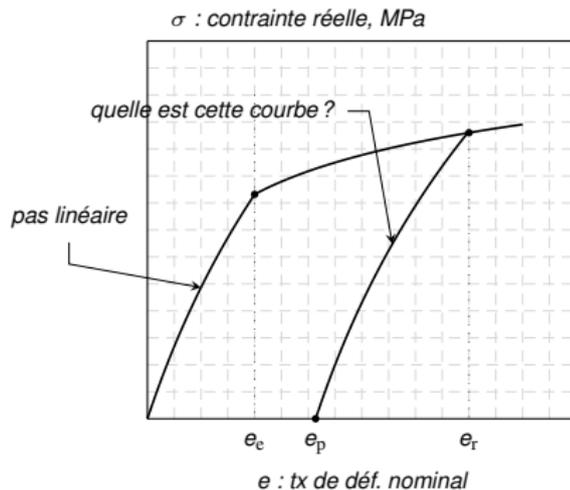
- Le *taux de déformation nominal* a un avantage calculatoire, mais il n'est usité que dans le contexte des petites déformations car, dans ce cas, il est peu différent du *taux réel*. Pour étudier les procédés de formage, il est important d'utiliser le *taux réel*. On bénéficie de ses avantages :
 - (i) linéarité de la loi de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$ or $\sigma \approx Ee$ seul. si $e \ll 5\%$ (cf. exos)),
 - (ii) étude des rebonds élastiques simplifiée,
 - (iii) *incrément de taux* ne dépendant que de la *config. courante* . . .
- La **contrainte nominale** est par contre une grandeur **fondamentale** et très utile. Elle représente la **force** développée par la machine de traction **normalisée par la surface initiale** de l'échantillon. C'est une image de la **charge** appliquée.
- Les informations données par σ et R sont ainsi **complémentaires**. La *contrainte de traction réelle* représente la *contrainte de traction physique* telle qu'on peut la mesurer à l'intérieur de l'échantillon.
- Notons que $R \leq \sigma$ à cause de la décroissance de la section de l'échantillon.

A 8: Rebond élastique en taux réel ou nominal

avec le taux réel



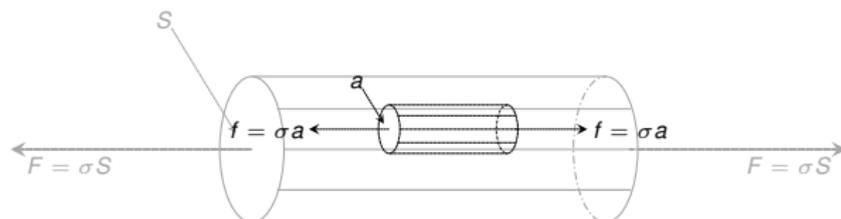
avec le taux nominal



A 9: Etat de contrainte local

Réponse de l'échantillon aux efforts externes

- *La contrainte de traction σ ne s'applique pas que sur les faces extrêmes de l'échantillon. L'équilibre mécanique de chaque portion d'échantillon implique que la contrainte σ se répercute sur chaque surface interne de l'échantillon perpendiculaire à l'axe de traction. Ce fait est illustré à la Fig. ci-dessous.*

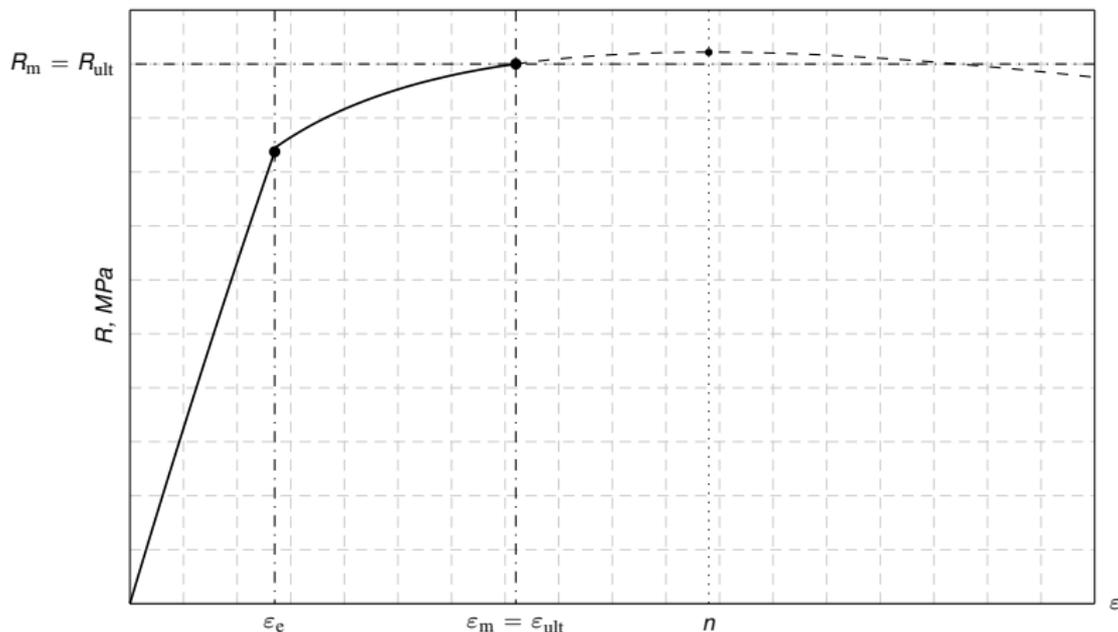


- *En cours d'une expérience de traction, l'échantillon est dans un **état de contrainte homogène** : une traction uniaxiale dont l'amplitude est égale à la contrainte réelle σ . On peut donc mesurer σ à l'aide d'une **jauge de contraintes**.*

A 10: Courbe de traction pour un matériau fragile

- Si $\varepsilon_{\text{ult}} < n$, la contrainte nominale maximale est réalisée à la rupture :

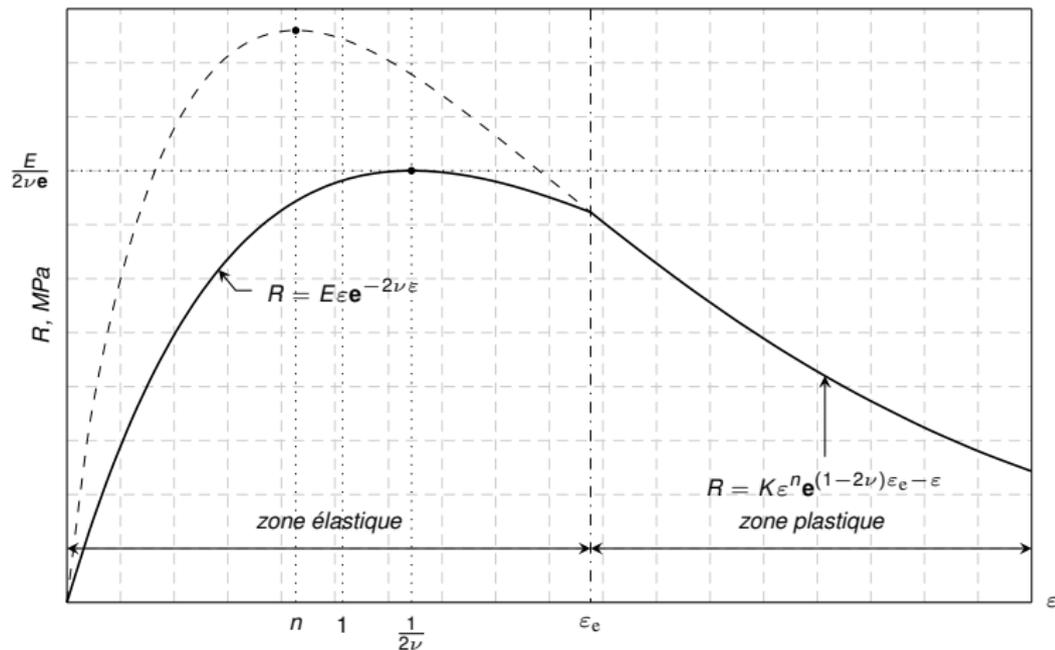
$$\varepsilon_m = \varepsilon_{\text{ult}} \quad \text{et} \quad R_m = R_{\text{ult}}.$$



A 11: Courbe de traction pour un mat. dur

- Si $\varepsilon_e > \frac{1}{2\nu}$, la résistance est atteinte à l'intérieur de la zone élastique :

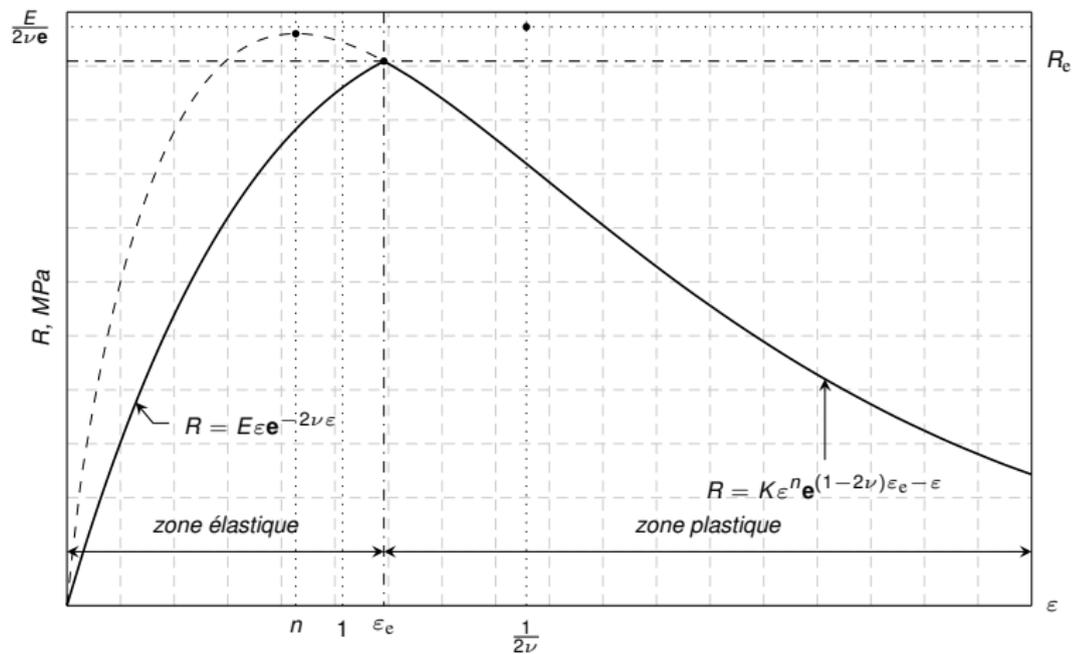
$$\varepsilon_m = \frac{1}{2\nu} \quad \text{et} \quad R_m = \frac{E}{2\nu e}.$$



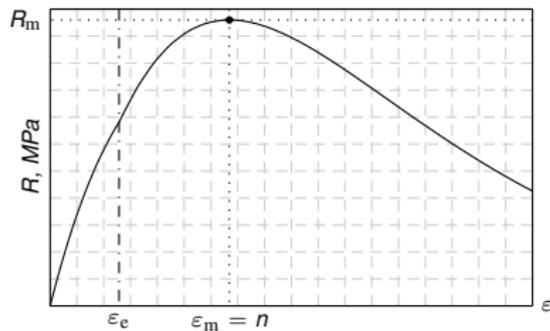
A 12: Courbe de traction pour un mat. dur (suite)

- Lorsque $\varepsilon_e \leq 1/2\nu$ mais $\varepsilon_e > n$, la résistance est atteinte en limite élastique :

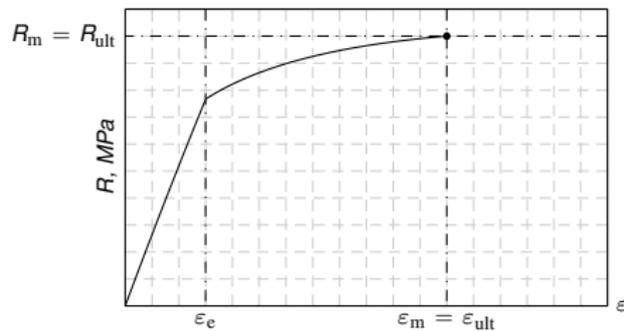
$$\varepsilon_m = \varepsilon_e \quad \text{et} \quad R_m = R_e.$$



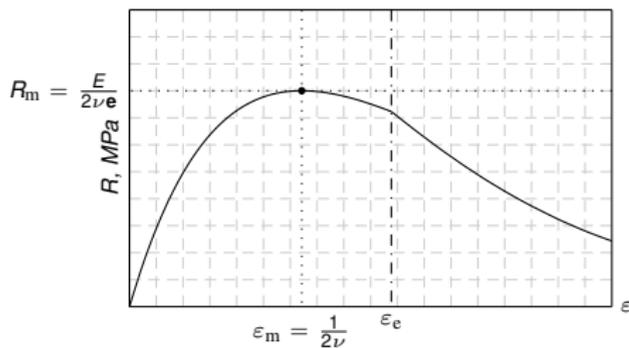
A 13: Courbes de traction typiques (Ludwik-Considère)



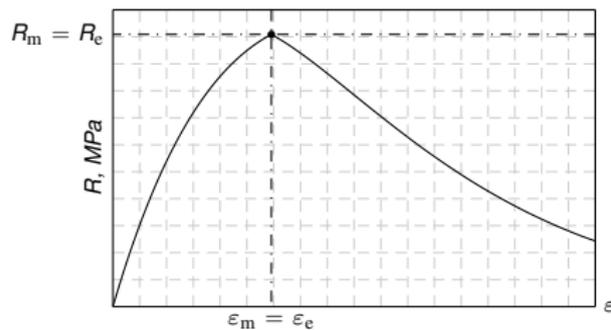
cas général (matériau formable)



matériau fragile



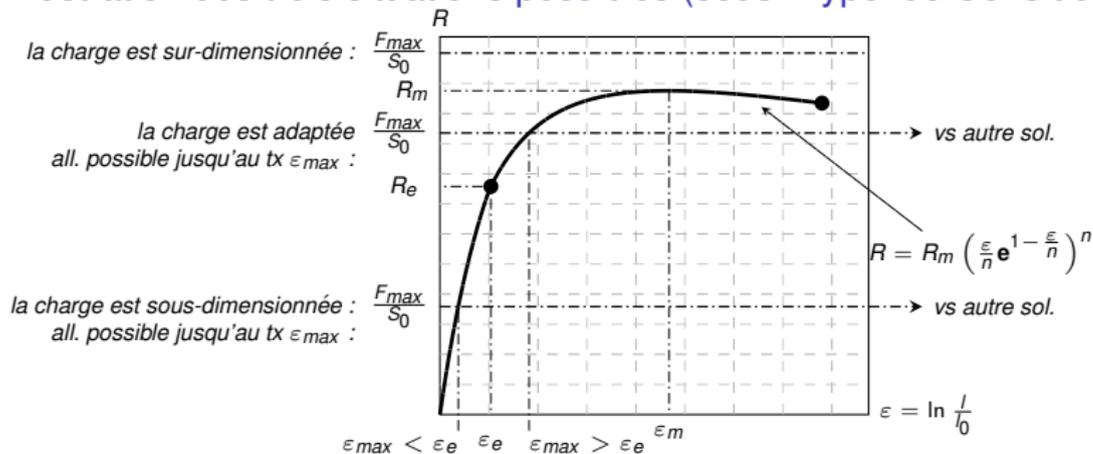
matériau (extra-)dur



matériau dur

A 14: Inversion de la fonction de traction

Illustration des trois situations possibles (sous l'hypo. de Considère)



- Le taux de déf. atteignable ϵ_{max} avec une charge adaptée F_{max} satisfait :

$$\frac{F_{max}}{S_0} = R_m \left(\frac{\epsilon_{max}}{n} e^{1 - \frac{\epsilon_{max}}{n}} \right)^n . \quad \text{(Equation de la déformation maximale)}$$

A 15: Calcul des taux de déformation, cas plastique

Problème

- On reçoit un matériau recuit de caractéristiques connues.
 - Il faut calculer le taux de déformation réel d'une barre de section $S_0 = 150.0 \text{ mm}^2$ soumise à une force de traction de $F = 90 \text{ kN}$.

<i>limite élastique</i>	<i>résistance</i>	<i>coeff. Poisson</i>	<i>coeff. écr.</i>
$R_e = 450 \text{ MPa}$	$R_m = 904.2 \text{ MPa}$	$\nu = 0.400$	$n = 0.2$

Tab. 1 Données relatives au matériau

$$\frac{F}{S_0} = 600.0 \text{ MPa} \geq R_e \text{ (cas plastique)}$$

$$\alpha = \frac{1}{e} n \sqrt{\frac{F}{R_m S_0}}$$

STO * exp RCL 0. 0 4 9 7 4 4 3 $\longrightarrow \bar{x}$

$$\downarrow \varepsilon = n\bar{x}$$

$$\varepsilon = 0.0099488$$

A 16: Résistance et contrainte ultime

Cas du matériau fragile

- Dans le cas d'un matériau fragile, la différence entre la résistance et la contrainte de traction ultime est moindre. On a généralement que $R_m \simeq \sigma_{ult}$.

σ, R, Pa

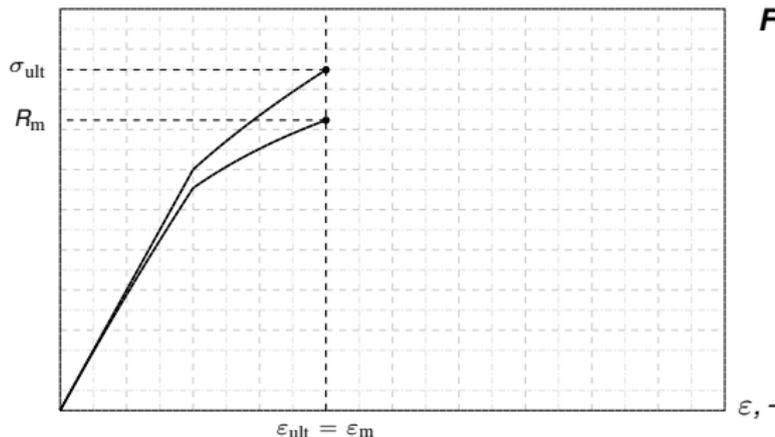
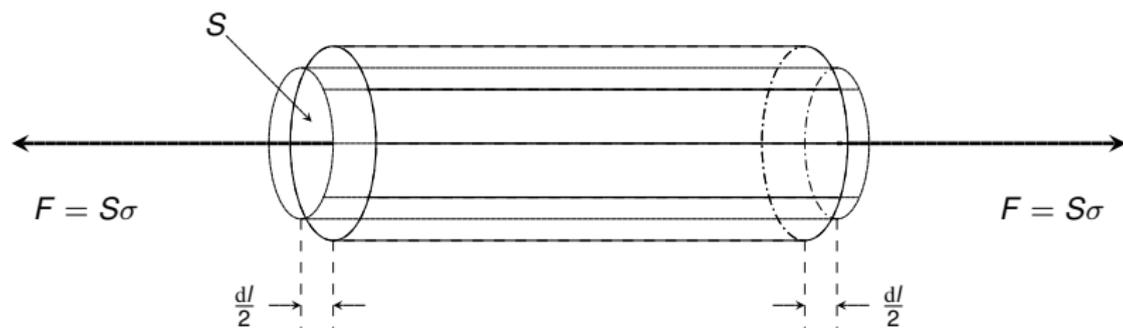


Fig. courbes de traction, matériau fragile

- **N.B.** Pour évaluer la tenue des matériaux sous charge externes, la valeur à utiliser pour la **résistance ultime à la traction (UTS)** est R_m , car le calcul des forces se fait (généralement) par rapport à la **géométrie initiale non déformée**.

A 17: Episode de traction (allongement dl de l'échantillon)

Représentation schématique



- *Le travail effectué vaut*

$$dA = F \frac{dl}{2} + F \frac{dl}{2} = Fdl = S\sigma dl = Sl\sigma \frac{dl}{l}$$

- *Comme $Sl = V$ et que $\frac{dl}{l} = d\varepsilon$, on conclut que*

$$dA = V\sigma d\varepsilon$$

A 18: Energie spécifique et courbe de traction réelle

Interprétation de l'énergie spécifique de déformation

- L'énergie spécifique de déformation $\eta = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon$, s'interprète comme l'aire sous la courbe de traction réelle.

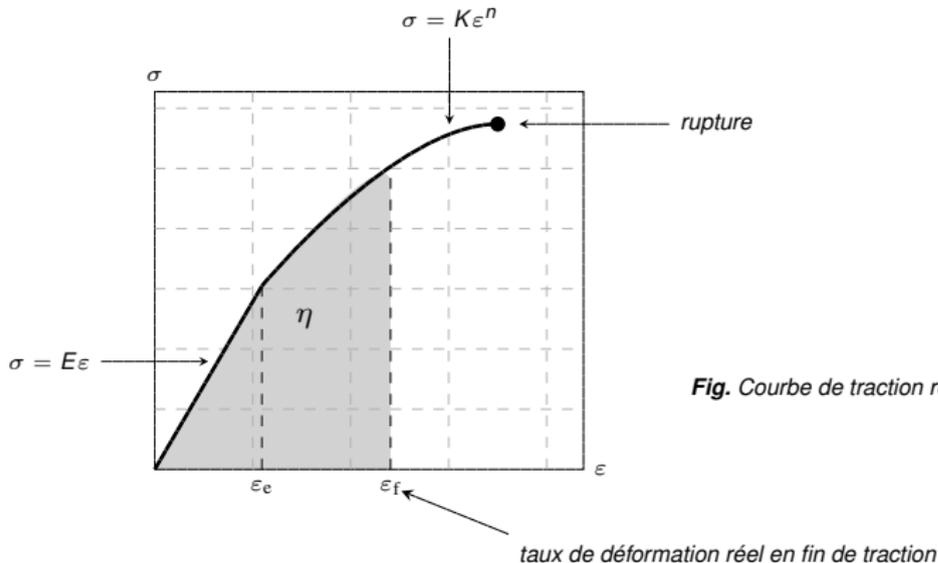
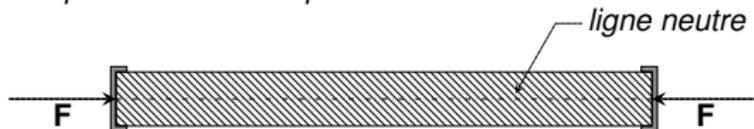


Fig. Courbe de traction réelle

A 19: Théorie du flambage

Etats de déformation d'un éch. de compr. (longueur l_0 , section S_0)

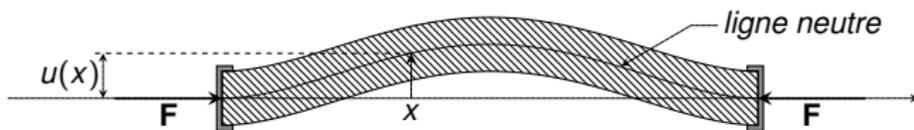
- L'état de déformation d'un échantillon de compression (longueur l_0 , section S_0) est en principe un état de compression uniforme :



- Si le rapport entre la contrainte nominale $R = \frac{F}{S_0}$ et le module d'Young E de la matière passe au-dessus d'un seuil :

$$\frac{R}{E} \geq \frac{S_0}{4\pi I_0^2}$$

alors il existe d'autres conf. d'équilibre, impliquant (par exemple) des flexions



- On appelle **flambage** la bifurcation vers ces nouveaux états de déformation.

A 20: Matériau résistant, matériau tenace

Matériau résistant

- *ne pourra être mis en forme qu'en déployant une force importante,*



Matériau tenace

- *ne pourra être mis en forme qu'en dépensant beaucoup d'énergie,*



A 21: Propriétés mécaniques de quelques matériaux

Propriétés mécaniques essentielles de certains matériaux

Matériau	R_m [MPa]	R_e [MPa]	E [GPa]	ν	ϵ_{ult}
Acier ordinaire	300/1100	200/900	210	0.3	0.17
Acier hautes carac.	1100/1800	1000/1700	210	0.3	-
Acier inox. aust.	-	180/240	195	0.3	0.4
Alliages aluminium	200/600	100/500	70	0.34	0.05/0.30
Titane	650	500	110	0.34	0.35/0.55
Cuivre (forgé)	215/930	49/420	115/132	0.31	0.015/0.55
Laiton	159/896	69/683	97/115	0.33	0.03/0.68
Bronze	96/1010	69/793	41/137	0.31	0/0.7

A 22: Données physiques

Coefficient d'érouissage pour différents matériaux

Matériau	<i>n</i>
Acier doux (0.05%C)	0.26
Acier à haute résistance (SAE 4340)	0.15
Acier trempé et revenu (0.6%C)	0.15
Laiton recuit (70Cu/30Zn)	0.49
Laiton déformé à froid (70Cu/30Zn)	0.19
Nickel recuit	0.43
Nickel déformé à froid	0.07
Aluminium recuit	0.15

A 23: Données physiques

Résistance au cisaillement (mesurée en essais de coupe)

Matériau	τ_S (ou τ_{ult}), MPa
Fer	370
Acier (0.13%C)	480
Acier (Ni-Cr-V)	690
Acier (austénitique inoxydable)	630
Nickel	420
Cuivre (recuit)	250
Cuivre (travaillé à froid)	270
Laiton (70Cu/30Zn)	370
Aluminium	97
Magnésium	125
Plomb	36