

Procédés de Fabrication I - IGI  
Chapitre 2. Propriétés Mécaniques des  
Matériaux

22 septembre 2023

# Programme de la première partie

1. Introduction
2. Description de l'expérience de traction uniaxiale
3. La contrainte en fonction de l'allongement
4. Le coefficient d'écrouissage
5. Décharge et relaxation

## 2.1.1 Généralités

### Observation

*Dans la plupart des procédés, la mise en forme de la matière première est basée sur les déformations plastiques. Exemple :*

- *formage des métaux : laminage, forgeage, extrusion, étirage,*
- *formage des feuilles : pliage, emboutissage, découpage,*
- *procédés de coupe (fraisage, perçage, décolletage).*

### Conséquence

*La planification puis l'optimisation des procédés de production cités plus haut est essentiellement conditionnée par les **propriétés mécaniques** du matériau à usiner.*

### Remarque

*Il existe d'autres procédés comme la fonderie ou l'injection dont les performances dépendent plutôt des **propriétés thermiques** du matériau à mettre en forme. Ce sujet sera traité dans le chapitre suivant.*

## 2.1.2 Objectifs du chapitre

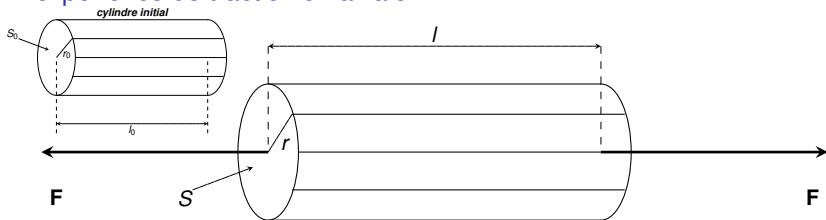
Principales propriétés mécaniques :

<b>Nom</b>	<b>Symbole</b>	<b>Unité</b>
<i>Le module d'élasticité</i> .....	$E$	[GPa]
<i>Le coefficient de Poisson</i> .....	$\nu$	[-]
<i>Le coefficient d'écouissage</i> .....	$n$	[-]
<i>Le module d'écouissage</i> .....	$K$	[MPa]
<i>La limite élastique</i> .....	$R_e$	[MPa]
<i>La résistance à la traction</i> .....	$R_m$	[MPa]
<i>Le taux de déformation réel à la rupture</i> .....	$\epsilon_{ult}$	[-]
<i>La dureté</i> .....	$HB, HV, HK$	[kg/mm <sup>2</sup> ]
...	...	...

(cf. Annexe 1)

## 2.2.1 Taux de déformation réel

### L'expérience de traction uniaxiale



On applique de façon **quasi statique** une force d'amplitude croissante.

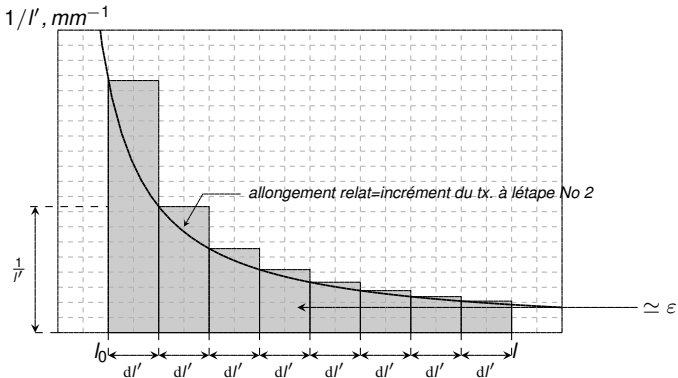
- *Durant un **épisode de déformation** la force passe de la valeur  $F'$  à la valeur  $F' + dF'$  et la barre s'allonge d'une quantité  $dl'$ . Le rapport  $dl' / l'$  joue un rôle crucial. On l'appelle **accroissement relatif de longueur***
- *La somme des accroissements relatifs sur toute l'expérience (de  $F' = 0$  à  $F' = F$ ) est une caractéristique importante de l'état de déformation de la barre. On appelle cette quantité **taux de déformation réel** et on la note  $\varepsilon$  :*

$$\varepsilon = \int_{\text{début}}^{\text{fin}} \frac{dl'}{l'} \quad (1)$$

## 2.2.2 Expression du taux de déformation réel

Aire sous le graphe de  $l' \rightarrow \frac{1}{l'}$  et taux de déformation

- Le tx. de déf. réel  $\varepsilon = \int_{\text{début}}^{\text{fin}} \frac{dl'}{l'}$  s'interprète comme l'aire sous le graphe de la fonction  $l' \rightarrow \frac{1}{l'}$  entre  $l' = l_0$  (longueur initiale) et  $l' = l$  (longueur finale) :



## 2.2.3 Expression du taux de déformation réel

### Aire sous le graphe de $l' \rightarrow \frac{1}{l'}$ et taux de déformation

- Or l'aire sous le graphe de la fonction  $l' \rightarrow \frac{1}{l'}$  entre  $l' = l_0$  et  $l' = l$  est une quantité bien connue. Elle équivaut au **logarithme** du rapport entre la borne finale  $l$  et la borne de départ  $l_0$  :

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln \frac{l}{l_0}, \quad \frac{l}{l_0} = \text{allongement relatif.} \quad (2)$$

*Cette formule permet d'évaluer  $\varepsilon$  avec un calculette et en fonction des états initial et final de l'échantillon seulement : l'historique de la déformation n'intervient pas !*

- La fonction logarithme a d'autres propriétés, elle est l'inverse de la fonction exponentielle :  $e^{\ln x} = x \iff \ln(e^x) = x$  où  $e = 2.71828182846 \dots$  désigne le nombre d'Euler et transforme les mult. en add. :  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .
- En particulier, si la longueur initiale  $l_0$  de l'échantillon est connu, on peut trouver sa longueur  $l$  qui correspond à un taux de déformation réel  $\varepsilon$  donné :

$$l = l_0 e^\varepsilon \quad (3)$$

## 2.2.4 Autre mesure de la déformation

### Taux de déformation nominal - définition

- On peut définir l'allongement relatif de longueur en comparant l'accroissement  $d l'$  non pas à la longueur courante  $l'$ , mais à la longueur initiale  $l_0$  :

$$\frac{d l'}{l_0} \quad \text{à la place de} \quad \frac{d l'}{l'}$$

- Dans ce cas, la taux de déformation caractérisant l'étirage  $l_0 \rightarrow l$  vaut

$$e = \int_{l_0}^l \frac{d l'}{l_0} \quad \text{à la place de} \quad \varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{d l'}{l'}$$

Evidemment, on peut résoudre l'intégrale définissant  $e$  :

$$e = \int_{l_0}^l \frac{d l'}{l_0} = \frac{\int_{l_0}^l d l'}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4)$$

- La quantité  $e$  porte le nom de *taux de déformation nominal*. Ce taux est souvent utilisé pour des raisons de simplicité : il est calculable sans extraction de logarithme. Néanmoins il comporte des désavantages, surtout parce qu'il ne respecte pas la propriété d'additivité des déformations (cf. exos).



## 2.2.5 Autre mesure de la déformation (suite)

### Taux de déformation nominal et réel

- Si l'échantillon n'est que peu déformé :  $l \simeq l_0$ , alors les taux nominaux et réels sont voisins l'un de l'autre (cf. exos) :

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \simeq \frac{l - l_0}{l_0} = e$$

- Comme  $l' \geq l_0$  durant la traction on a que  $\frac{dl'}{l'} \leq \frac{dl'}{l_0}$ . Il s'ensuit tjs. que

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} \leq \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l_0} = e.$$

- Même s'il est proche, le taux nominal sur-estime donc toujours le taux réel.

## 2.3.1 La contrainte en fonction de l'allongement

### Observation générale, linéarité par rapport à la surface (Hooke)

- La force  $F$  dépend du matériau, du taux de déformation réel  $\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$  et est proportionnelle à la section  $S$  :

**Conséquence** : Il existe  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  t.q.  $F = S\sigma(\varepsilon)$ .

- La quantité  $\sigma$  est appelée **contrainte réelle**, son unité est :  $[\sigma] = \text{MPa}$ . La forme exacte de cette fonction dépend du matériau considéré.
- Il existe un taux de déformation  $\varepsilon_e$  en deçà duquel la traction est réversible ou **élastique**. Au-delà de ce taux de déformation, la traction est irréversible ou **plastique** et la fonction  $\varepsilon \rightarrow \sigma(\varepsilon)$  va présenter deux régimes suivant que  $\varepsilon < \varepsilon_e$  (régime élastique) ou que  $\varepsilon > \varepsilon_e$  (régime plastique).
- La quantité  $\varepsilon_e$  est appelée **taux de déformation réel en limite élastique**. Elle dépend du matériau et de son état cristallographique (microstructure).



**Thomas Young**  
(1773-1829)

## 2.3.2 La contrainte en fonction de l'allongement

### Loi de Hooke et d'érouissage

- Dans le domaine élastique, la fonction  $\varepsilon \rightarrow \sigma(\varepsilon)$  est **nécessairement linéaire**. C'est une conséquence de la **réversibilité** des déformations élastiques et du fait que, dans ce régime, un précontrainte ne peut pas influencer la déformabilité de la matière :

$$\sigma = E\varepsilon, \varepsilon \leq \varepsilon_e. \quad (\text{loi de Hooke}) \quad (5)$$

Le coefficient de proportionnalité  $E$  est appelé **module d'Young ou d'élasticité**. Il dépend du matériau et est mesuré en MPa.

- Dans le domaine plastique, la fonction  $\varepsilon \rightarrow \sigma(\varepsilon)$  peut présenter des formes beaucoup plus générales en principe mesurées expérimentalement. La plupart des métaux recuits suivent assez bien la loi :

$$\sigma = K\varepsilon^n, \varepsilon \geq \varepsilon_e, \quad (\text{loi de Ludwik}) \quad (6)$$

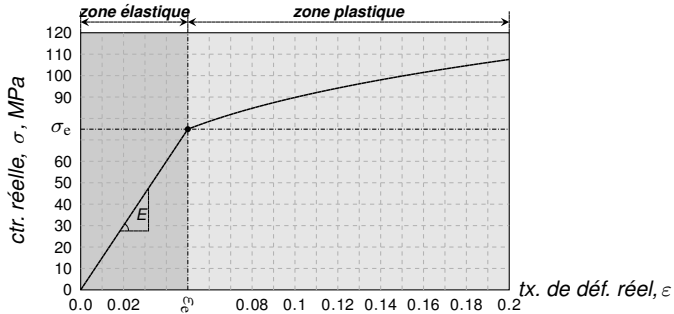
où l'exposant  $n$  est le coefficient d'érouissage et  $K$  le module d'érouissage.

- Pour que les lois (5) et (6) coïncident à la limite élastique  $\varepsilon = \varepsilon_e$  il faut que

$$K = E\varepsilon_e^{1-n} \quad (7)$$

## 2.3.3 La contrainte en fonction de l'allongement

### Courbe de traction et limite élastique réelles



- La quantité  $\sigma_e = E\epsilon_e$  est la **limite élastique réelle du matériau**. Si la contrainte de traction appliquée excède cette limite, le matériau subit une déformation permanente. Cet état est celui recherché dans les processus de **formage** (forgeage, laminage, ...). Les forces mises en jeu par ces procédés amèneront le niveau de contrainte au-delà de la valeur  $\sigma_e$ . Cela justifie l'importance de la partie plastique de la courbe de traction dans ce cours.

## 2.3.4 Limite élastique réelle

### Interprétation microscopique et augmentation

- *La quantité  $\sigma_e$  correspond au niveau de traction uniaxiale à partir duquel les dislocations se mettent à bouger (écoulement du matériau).*
  - *Il faut souligner que seules des contraintes de **cisaillement** peuvent mobiliser des dislocations. Or un état de traction uniaxiale implique que certains plans sont sollicités en cisaillement !*
- *On peut augmenter la limite élastique réelle  $\sigma_e$  (donc la **dureté** du matériau à laquelle elle est liée)*
  - *en accroissant la densité de dislocation car les dislocations gênent leurs mouvements mutuels (phénomène d'**écrouissage**),*
  - *en **raffinant** la microstructure du matériau pour augmenter les joints de grains qui eux aussi gênent le mouvement des dislocations,*
  - *en ajoutant des impuretés pour **bloquer** les dislocations (durcissement par ajout d'éléments d'alliage).*

(cf. Annexes 4, 6)

## 2.4.1 Bornes pour le coefficient d'écroissage

### Règle générale

- Pour des raisons thermodynamiques (cf. exercices), on a que

$$0 < n < 1.$$

### Discussion des valeurs possibles de $n$

- Le cas limite  $n = 0$  correspond à un matériau au comportement **plastique idéal**. Dans ce cas  $\sigma = c^{ste}$  au delà de la limite élastique

$$n_{or} \simeq 0.$$

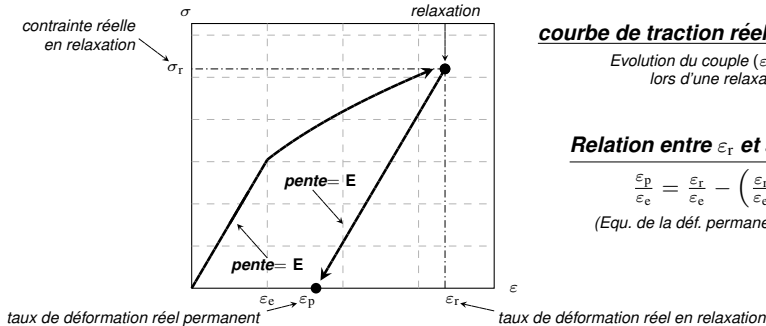
- Pour les matériaux réels,  $n > 0$  et la contrainte  $\sigma$  croît avec  $\varepsilon$ . Si  $n \simeq 1$ , plus on le déforme plus le matériau est dur à travailler (**écroissage par augmentation de la densité de dislocations**)

$$n_{cuivre} \simeq 1.$$

## 2.5.1 Relaxation

### Déformation permanente

- Dans l'exp. de traction, on appelle **relaxation** le fait de laisser revenir la force (donc la contrainte réelle) à zéro.
- On observe que le point  $(\varepsilon, \sigma)$  représentatif de l'état de l'échantillon retourne sur l'axe  $\sigma = 0$  en **ligne droite**. Cette ligne droite est parallèle à la montée élastique, sa pente est donc **exactement** égale au module d'Young  $E$ .
- Elle rejoint l'axe  $\sigma = 0$  en l'abscisse  $\varepsilon_p$  : le taux de déformation réel permanent.



#### courbe de traction réelle :

Evolution du couple  $(\varepsilon, \sigma)$   
lors d'une relaxation.

#### Relation entre $\varepsilon_r$ et $\varepsilon_p$ :

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_e} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} - \left( \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} \right)^n$$

(Equ. de la déf. permanente)

## 2.5.2 Ecrouissage

### Définition

- Une pièce ayant subi une traction jusqu'en zone plastique est dite **écrouie**.
- Si l'échantillon écroui subit une nouvelle exp. de traction, il revient à l'état de relaxation de façon **élastique** puis son point représentatif dans le plan  $(\varepsilon, \sigma)$  dessine la courbe qu'il aurait dessinée si la relaxation n'avait pas eu lieu.

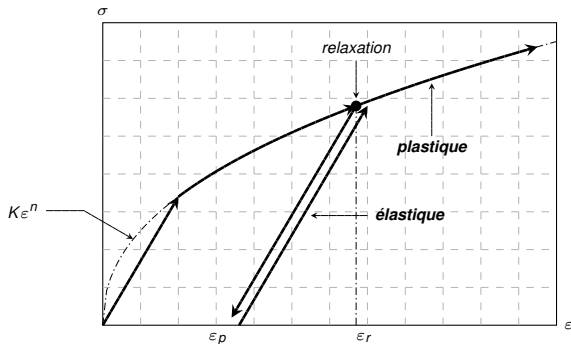


Fig.9 Reprise de l'exp. de traction après relaxation.



## 2.5.3 Contrainte de traction ultime

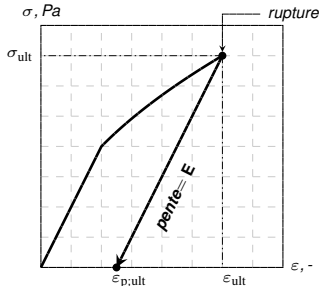
### Rupture et déformation permanente maximale

- Dans une expérience de traction, il existe un taux de déformation réel  $\varepsilon_{\text{ult}}$ , appelé **taux de déformation réel en rupture**, à partir duquel l'échantillon se casse. La contrainte réelle mesurée à ce moment-là est la **contrainte de traction ultime (réelle)**. Elle est notée  $\sigma_{\text{ult}}$ .
- Depuis la situation de rupture, la relaxation amène l'échantillon à un état de déformation permanente caractérisé par le taux réel :

$$\varepsilon_{p;\text{ult}} = \varepsilon_{\text{ult}} - \varepsilon_e^{1-n} \varepsilon_{\text{ult}}^n \quad (8)$$

- Le taux  $\varepsilon_{p;\text{ult}}$  est ainsi le **plus grand taux de déformation** qu'on peut induire de façon **permanente** dans un échantillon !

**ATTENTION** : Il ne faut pas confondre la contrainte de traction ultime  $\sigma_{\text{ult}}$  et la résistance  $R_m$  qui sera introduite au trspt. 2.7.1 et qui représente la force maximale qu'un échantillon de traction de section initiale unité peut supporter sans rompre (cf. trspt. 2.7.3).



# Programme de la seconde partie

6. Les propriétés géométriques, loi de Poisson
7. La force de traction et la contrainte nominale
8. L'inversion de la fonction de traction, applications

## 2.6.1 Rapport entre les propriétés géométriques

### Elasticité-Loi de Poisson

- Avant que des cous étroits n'apparaissent sur l'échantillon (striction) l'échantillon **reste cylindrique**, mais son rayon diminue. Le but de ce paragraphe est de trouver un moyen d'exprimer le rayon, la section droite et le volume de l'échantillon en fonction du taux de déformation  $\varepsilon$  :

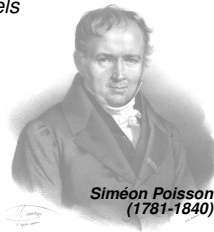
$$r = r(\varepsilon), \quad S = S(\varepsilon) \quad \text{et} \quad V = V(\varepsilon),$$

à l'instar de ce qu'on a fait dans la section qui précède pour la longueur et la contrainte réelle :  $l = l(\varepsilon) = l_0 e^\varepsilon$  et  $\sigma = \sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$ .

- Dans le domaine élastique ( $\varepsilon < \varepsilon_e$ ), la variation relative de rayon et l'accroissement relatif de longueur sont proportionnels

$$\frac{dr}{r} = -\nu \frac{dl}{l} \quad (\text{d\u00e9f. \u00e9lastique}) \quad (9)$$

- Le coefficient  $\nu > 0$  est appel\u00e9 **coefficient de Poisson**. C'est une caract\u00e9ristique m\u00e9canique importante des mat\u00e9riaux.



## 2.6.2 Rapport entre les propriétés géométriques

### Elasticité-Loi de Poisson

- L'équation différentielle (9) s'intègre en

$$\frac{r}{r_0} = \mathbf{e}^{-\nu\varepsilon}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_e. \quad (10)$$

- Les rapports entre sections ( $S = \pi r^2$  et  $S_0 = \pi r_0^2$ ) et entre volumes ( $V = Sl$  et  $V_0 = S_0 l_0$ ) sont :

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_e \quad (11)$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{S}{S_0} \frac{l}{l_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_e \quad (12)$$

- Lors de l'expérience de traction, longueur et volume augmentent simultanément. Cette remarque contraint les valeurs possibles du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\nu \leq 0.5 \quad (13)$$

Si  $\nu = \frac{1}{2}$ , le volume reste cst. ( $V = V_0$ ), l'échantillon est dit **incompressible**.

## 2.6.3 Rapport entre les propriétés géométriques

### Plasticité-Théorie de Considère

- *La théorie de Considère repose sur l'hypothèse que le volume de l'échantillon ne change plus dès lors qu'il a atteint la plasticité, autrement dit :*

$$V = V_e, \quad \varepsilon \geq \varepsilon_e, \quad (14)$$

avec  $V_e = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e} V_0$ , le volume en limite élastique (12).

- *La conclusion de (14) est que*

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V_e}{V_0} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e}, \quad \varepsilon > \varepsilon_e \quad (15)$$

$$\frac{S}{S_0} = \frac{V}{V_0} \times \frac{l_0}{l} = \mathbf{e}^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon} \quad \varepsilon > \varepsilon_e \quad (16)$$

$$\frac{r}{r_0} = \left( \frac{S}{S_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{e}^{(\frac{1}{2}-\nu)\varepsilon_e - \frac{1}{2}\varepsilon}, \quad \varepsilon > \varepsilon_e \quad (17)$$



**Armand Considère**  
(1841-1914)

## 2.6.4 Rapport entre les propriétés géométriques

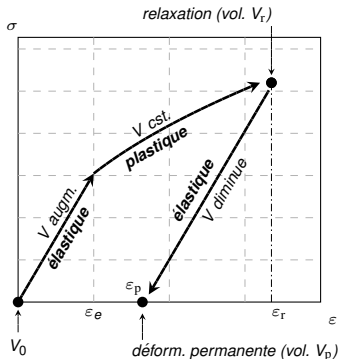
### Inconsistance de la Théorie de Considère

- Dans les faits, la Théorie de Considère est inconsistante. En effet, elle prédit qu'un échantillon soumis à un cycle écrouissage-relaxation diminue de volume (cf. exos) :

$$V_p < V_0.$$

et même que l'échantillon disparaît si on répète ce cycle indéfiniment :

$$V_0 \rightarrow 0.$$

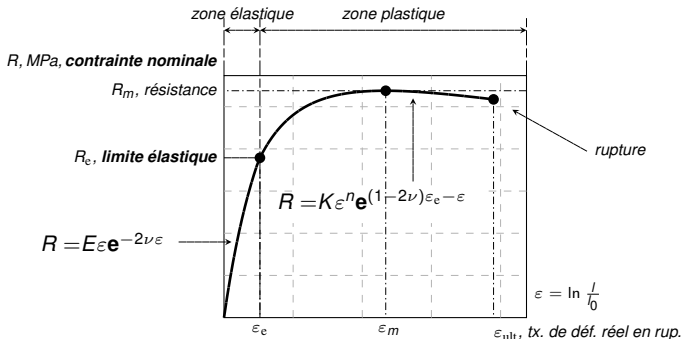


- Il faudrait remplacer les rel. (15)-(17) par des équations qui prédisent qu'un cycle écrouissage-relaxation **conserve** le volume de l'échantillon  $V_p = V_0$ .
- Ces équations sont celles de Hencky. Elles sont plus compliquées que celles de Considère or, pour un matériau standard ( $n \simeq 0$  et  $\nu \simeq \frac{1}{2}$ ), elles prédisent des comportements très voisins. En pratique, on appliquera donc (15)-(17).

## 2.7.1 Force et courbe de traction

### Contrainte nominale pour un matériau revenu (appr. de Considère)

- Les lois (Hooke, **Ludwik**<sup>1</sup>, Poisson, Considère) donnent  $\sigma$  et  $S$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $S_0$  :  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  et  $S = S_0 s(\varepsilon)$  avec  $s(\varepsilon) = e^{-2\nu\varepsilon}$  ou bien  $s(\varepsilon) = e^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon}$ .
- La force de traction  $F = \sigma S$  est donc proportionnelle à  $S_0$  :  $F = S_0 [\sigma(\varepsilon)s(\varepsilon)]$ .
- Le rapport  $R = F/S_0$  est appelé contrainte nominale :  $R = \sigma(\varepsilon)s(\varepsilon)$



(cf. Annexes 8, 2)

1. La situation obtenue avec d'autres lois d'écroutissage (e.g. Swift) sera traitée en exercice.

## 2.7.2 Courbe de traction et résistance

La valeur de la résistance dépend de la localisation de  $n$  et  $\varepsilon_e$

- (1) **(Cas général)** Si  $\varepsilon_e < n \leq \varepsilon_{ult}$ , alors la résistance est atteinte en phase d'écroutissage (cf. trspt. 2.7.1). Pour un matériau revenu et sous l'hyp. de Considère :

$$\varepsilon_m = n; \quad R_m = K \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{(1-2\nu)\varepsilon_e}.$$

- (2) **(Cas matériau fragile)** Si  $n > \varepsilon_{ult}$  alors la résistance est atteinte à la **rupture**. Si on applique l'hypothèse de Considère et qu'on désigne par  $\sigma_{ult}$  la contrainte de traction ultime réelle, on a

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{ult}; \quad R_m = R(\varepsilon_{ult}) = \sigma_{ult} e^{(1-2\nu)\varepsilon_e - \varepsilon_{ult}}$$

- (3) **(Cas matériau dur)** Si  $n < \varepsilon_e$  alors la résistance est atteinte en **zone élastique** :

$$\begin{aligned} \text{si } \varepsilon_e < \frac{1}{2\nu} : \quad & \varepsilon_m = \varepsilon_e; \quad R_m = R_e, \\ \text{si } \varepsilon_e \geq \frac{1}{2\nu} : \quad & \varepsilon_m = \frac{1}{2\nu}; \quad R_m = \frac{E}{2\nu e}. \end{aligned}$$

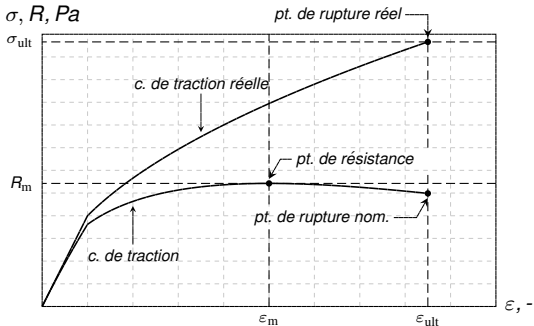


## 2.7.3 Résistance et contrainte de traction ultime

### Résistance et contrainte de traction ultime

- La résistance  $R_m$  est la **force maximale** qu'un échantillon de traction de section initiale unité peut supporter. Cette quantité se lit sur la **courbe de traction**. Il ne faut pas confondre  $R_m$  avec la contrainte de traction ultime  $\sigma_{ult}$  (cf. trspt. 2.5.3) qui correspond à la **contrainte de traction réelle** qu'on mesure au moment de la rupture. Cette quantité se lit sur la **courbe de traction réelle**. A cause de la diminution des dimensions latérales (Poisson), on a toujours que

$$\sigma_{ult} > R_m.$$



**Fig.** courbes de traction, matériau ductile

## 2.7.4 Fonction de traction

### Fonction de traction (avec l'approximation de Considère)

- *Le module d'écroutissement est lié à la résistance. Pour un matériau revenu, on a*

$$K = R_m \left( \frac{\mathbf{e}}{n} \right)^n \mathbf{e}^{-(1-2\nu)\varepsilon_e}$$

- *Pour un matériau revenu, on obtient ainsi une expression simple de la contrainte nominale*

$$R = \begin{cases} E\varepsilon \mathbf{e}^{-2\nu\varepsilon}, & \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ R_m \left( \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{e}^{1-\frac{\varepsilon}{n}} \right)^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_e \end{cases}$$

### Utilisation de la fonction de traction

- *La fonction de traction permet de calculer la **force de traction**  $F$  nécessaire à atteindre un **taux de déformation**  $\varepsilon$  connu.*
- *Pour calculer le **taux de déformation**  $\varepsilon$  qu'on atteint lorsque la **force de traction**  $F$  est imposée, il faut inverser la fonction de traction.*

## 2.8.1 Inversion de la fonction de traction (cas général)

Trois cas se présentent :

- (1) **Cas élastique** : Si  $F/S_0 \leq R_e$ , l'équation à résoudre est

$$\frac{F}{S_0} = E\varepsilon e^{-2\nu\varepsilon}.$$

- (2) **Cas plastique** : Si  $R_e < F/S_0 < R_m$ , l'équation à résoudre pour un matériau revenu et sous l'hypothèse de Considère, est

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left( \frac{\varepsilon}{n} e^{1-\frac{\varepsilon}{n}} \right)^n.$$

- (3) **Cas de rupture** : Si  $F/S_0 > R_m$ , la déformation peut être menée jusqu'à la rupture :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ult}}$$

## 2.8.2 Inversion de la fonc. de traction, (cas plastique)

### Observation

- *Même sous l'hypothèse de Considère, l'équation à résoudre est **transcendante**. dans le cas d'un matériau revenu, cette équation est :*

$$\frac{F}{S_0} = R_m \left( \frac{\varepsilon}{n} e^{1 - \frac{\varepsilon}{n}} \right)^n.$$

### Méthode de résolution pour trouver $\varepsilon < n$

- *On pose  $\alpha = \frac{1}{e} \sqrt[n]{\frac{F}{R_m S_0}}$ .*
- *A partir de la condition initiale  $x_0 = \alpha$ , on effectue l'itération de pt. fixe*

$$x_{m+1} = \alpha e^{x_m}, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

- *On appelle  $\bar{x}$  sa limite et on trouve le taux de déformation réel ( $\varepsilon < n \equiv \varepsilon_m$ )*

$$\varepsilon = n\bar{x}$$

# Programme de la troisième partie

9. Energie de déformation

10. L'expérience de dureté

11. L'expérience de compression

## 2.9.1 Energie spécifique de déformation

### Travail et énergie spécifique

- Le travail fourni sur un épisode de l'expérience de traction est

$$dA = S\sigma dl \implies dA = V\sigma d\varepsilon.$$

- Le travail total pour amener l'échantillon au taux de déformation réel  $\varepsilon_f$  vaut :

$$A = \int_0^{\varepsilon_f} V\sigma d\varepsilon$$

- Si le matériau est **incompressible** alors  $V = V_0$  et

$$A = V_0 \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon = V_0 \eta$$

$$\text{où } \eta = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \quad (\text{énergie spécifique de déformation})$$

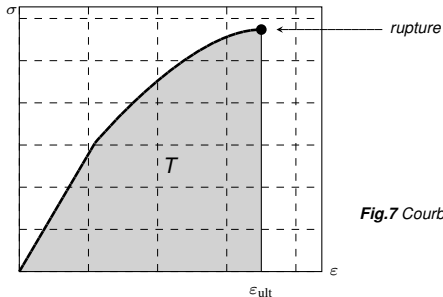
- Pour un matériau général,  $V_0\eta$  est une **sous-estimation** du travail  $A$ .
- Pour un matériau général,  $V_f\eta$  est une **sur-estimation** du travail  $A$ .

## 2.9.2 Ténacité

### Définition de la ténacité

La **ténacité**  $T$  est l'énergie spécifique de déformation jusqu'en rupture :

$$T = \int_0^{\varepsilon_{\text{ult}}} \sigma d\varepsilon$$

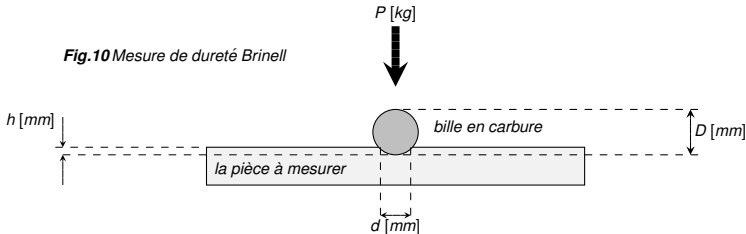


**Fig.7** Courbe de traction réelle

## 2.10.1 L'expérience de dureté

### Définition

- La dureté est une mesure hybride corrélée à la limite élastique mais aussi à l'usure.
- Les mesures de dureté standardisées sont nombreuses (Brinell, Vickers, Rockwell). Elles sont en principe simples et non destructives.
- La mesure la plus classique est due à Brinell (dureté HB).



$$HB = \frac{\text{charge en [kg]}}{\text{surface de l'empreinte en [mm}^2]} = \frac{P}{\pi Dh} = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$



## 2.10.2 Dureté et Limite élastique.

### Observation empirique

- *Il existe une relation approximative entre la dureté et la limite élastique.*
- *Lorsque l'on donne HB en unité de  $[kg/mm^2]$ , on peut approcher  $R_e$  en unité de  $[MPa]$  grâce aux formules :*
  - $R_e \simeq 3.5HB$ , pour des matériaux écrouis,
  - $R_e \simeq 2.0HB$ , pour des matériaux recuits.



**J.A. Brinell (1849-1925)**



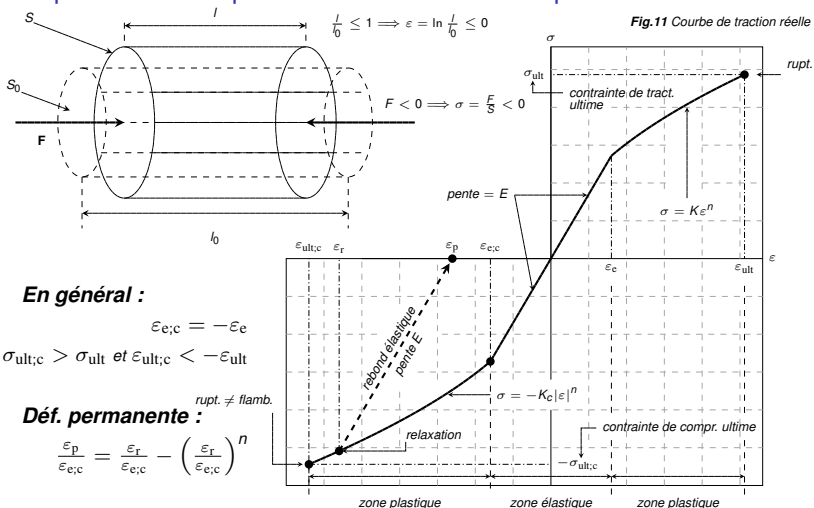
**M. Bazaroff**  
*Ds "L'oreille cassée"*



**Basil Zaharoff (1849-1936)**  
*former CEO of Vickers Ltd*

## 2.11.1 L'expérience de compression

Elle permet de compléter la courbe de traction pour les déf.  $< 0$



## 2.11.2 L'expérience de compression (suite)

### Loi de Poisson et de Considère en compression

- Les lois de Poisson et de Considère se maintiennent avec la même valeur du coefficient de Poisson  $\nu$  que pour la traction.

Situation	$\varepsilon \leq \varepsilon_{e;c}$ ( <b>élasticité</b> )	$\varepsilon > \varepsilon_{e;c}$ ( <b>plasticité</b> )
$\frac{r}{r_0}$	$e^{-\nu\varepsilon}$	$e^{(\frac{1}{2}-\nu)\varepsilon_{e;c}-\frac{1}{2}\varepsilon}$
$\frac{S}{S_0}$	$e^{-2\nu\varepsilon}$	$e^{(1-2\nu)\varepsilon_{e;c}-\varepsilon}$
$\frac{V}{V_0}$	$e^{(1-2\nu)\varepsilon}$	$e^{(1-2\nu)\varepsilon_{e;c}}$

- Il faut noter que les taux de déformations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_{e;c}$  sont **négatifs**.
- Les formules ci-dessus prévoient donc des **augmentations** de rayon et de section mais des **diminutions** de volume (car  $\nu \leq \frac{1}{2}$ ).
- L'hypothèse de Considère est toujours inconsistante puisqu'elle prédit une augmentation plastique du volume après rebond. Cependant, pour la plupart des matériaux, elle donne lieu à de bonnes sur-estimations de la réalité (formule de Hencky).

Energie  
○○

Durété  
○○

Compression  
○○●



# A 1: Terminologie anglaise

## Glossaire des concepts importants en anglais

<i>Français</i>	<i>Anglais</i>
<i>Taux de déformation :.....</i>	<i>Real strain</i>
<i>Taux de déformation nominal : .</i>	<i>Engineering strain</i>
<i>Contrainte (réel, nominale) :....</i>	<i>(Real, engineering) stress</i>
<i>Essai de traction :.....</i>	<i>Tensile test</i>
<i>Courbe de traction :.....</i>	<i>Tensile curve</i>
<i>Essai de compression :.....</i>	<i>Compressive test</i>
<i>Essai de cisaillement :.....</i>	<i>Shear test</i>
<i>Limite élastique :.....</i>	<i>Yield (tensile) strength</i>
<i>Résistance :.....</i>	<i>Ultimate (tensile) strength</i>
<i>Dureté :.....</i>	<i>Hardness</i>
<i>Ténacité :.....</i>	<i>Tenacity</i>
<i>Module d'élasticité :.....</i>	<i>Elasticity modulus</i>
<i>Module de cisaillement :.....</i>	<i>Shear modulus</i>
<i>Coefficient de Poisson :.....</i>	<i>Poisson ratio</i>
<i>Ecrouissage :.....</i>	<i>(Work or strain) hardening</i>
<i>Dislocation :.....</i>	<i>Dislocation</i>



## A 3: Linéarisation de la loi de Hooke

### Théorie de l'élasticité linéaire

- Vous connaissez sans doute la loi

$$\sigma = Ee, \quad e \leq e_e \quad (\text{loi de Hooke approchée})$$

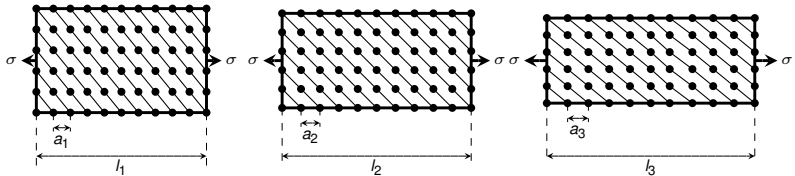
où  $e = \frac{l-l_0}{l_0}$  est le **taux de déformation nominal**.

- La loi de Hooke approchée ne peut pas être vraie en général car elle conduit à des prédictions aberrantes comme une **diminution de la déformabilité** de la matière sous précontraintes (cf.exos).
- Cependant, dans le cas où  $e$  est assez petit ( $e < 0.05$ ), alors on a que  $\varepsilon \simeq e$  et les lois de Hooke et exactes sont à peu-près équivalentes.
- Comme  $e > \varepsilon$ , la loi de Hooke approchée **surestime** systématiquement la contrainte réelle  $\sigma$ .

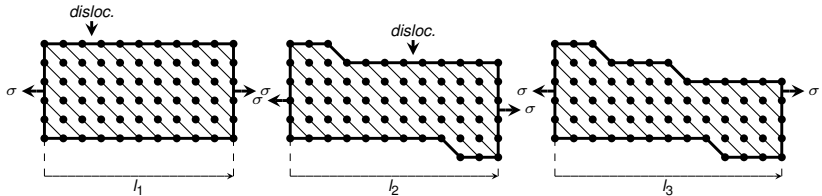


## A 4: Mobilisation des dislocations

Elasticité ( $\sigma < \sigma_e$ ) : modification des paramètres de maille

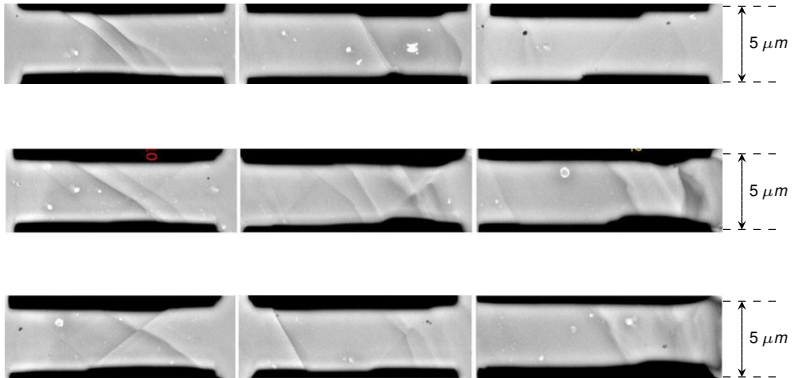


Plasticité ( $\sigma > \sigma_e$ ) : création et mouvement de dislocations



## A 5: Déformation plastiques

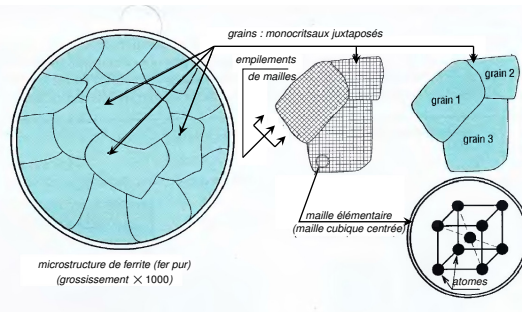
Observation TEM de micro-spécimens de traction



## A 6: Microstructures et grains

### Grains, monocristaux et mailles

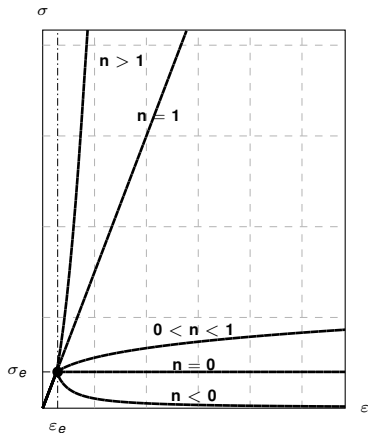
- Les métaux sont formés de monocristaux ou **grains** placés côte à côte et de forme polygonale plus ou moins régulière.
- A l'intérieur d'un grain, les atomes sont disposés de façons périodiques. La structure répétée périodiquement est appelée **maille** (e.g. maille cubique centré, maille cubique face centrée).



- Les traitements thermiques sont susceptibles de modifier la microstructure (i.e la taille et la morphologie des grains).

## A 7: Courbe de traction réelles pour diff. val. de $n$

Exemples de courbes de traction réelles



**Fig.** Courbe de traction réelle

## A 8: Valeurs nominales et valeurs réelles

### Relations systématiques

	<i>réel</i>	<i>nominal</i>
<b>taux de déformation</b>	$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$	$e = \frac{l-l_0}{l_0}$
<b>contrainte</b>	$\sigma = \frac{F}{S}$	$R = \frac{F}{S_0}$

- $R \leq \sigma$  à cause de la décroissance de la section de l'échantillon.
- $e \geq \varepsilon$  à cause de la croissance de la longueur de l'échantillon :

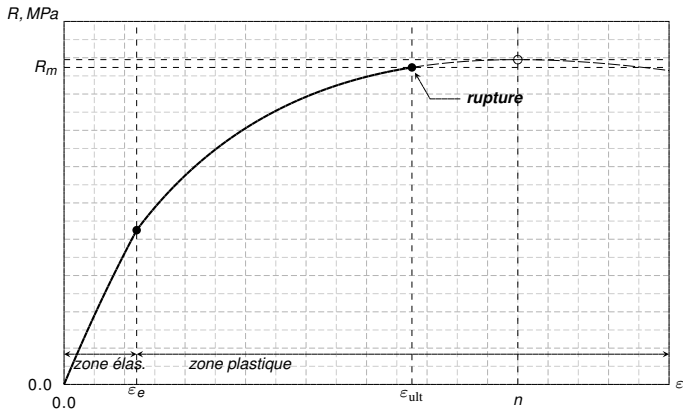
$$e = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l_0} \geq \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \varepsilon$$

- Si le taux de déformation nominal n'est usité que dans le contexte des petites déformations, la contrainte nominale est une grandeur **fondamentale**. En effet, elle représente la **force** développée par la machine de traction **normalisée par la surface initiale** de l'échantillon.
- La contrainte nominale  $R$  est directement liée à la notion de **charge**, tandis que la contrainte de traction réelle  $\sigma$  représente la contrainte de traction qu'on peut mesurer à l'intérieur de l'échantillon.

## A 9: Courbe de traction lorsque $\varepsilon_m = n > \varepsilon_{ult}$

Exemple de courbe de traction : cas  $n > \varepsilon_{ult}$

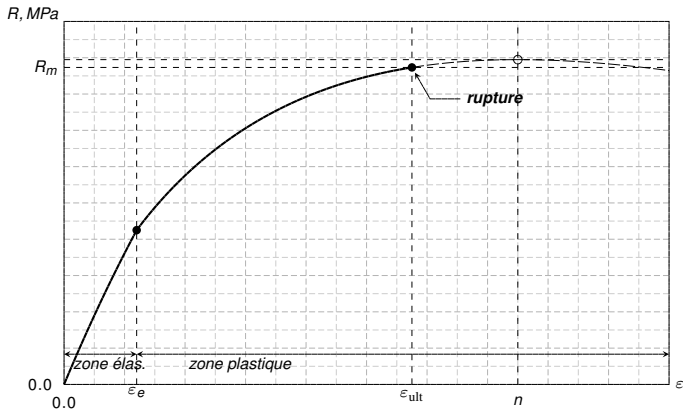
- La contrainte nominale maximale est réalisée au moment de la rupture !



## A 10: Courbe de traction lorsque $\varepsilon_m > \varepsilon_{rup}$

Exemple de courbe de traction : cas  $n > \varepsilon_{ult}$

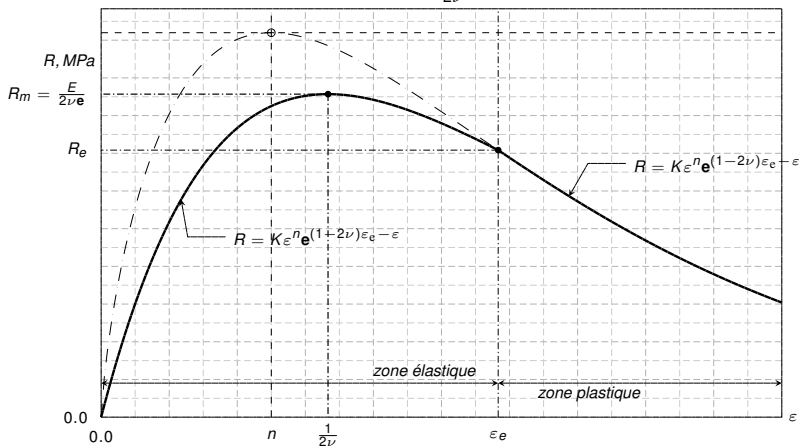
- La contrainte nominale maximale est réalisée au moment de la rupture !



## A 11: Courbe de traction pour un mat. dur

Exemple de courbe de traction : cas  $\varepsilon_e > \frac{1}{2\nu}$

- Dans le cas où  $\varepsilon_e > \frac{1}{2\nu}$ , la contrainte nominale maximale est réalisée à l'intérieur de la zone élastique : en  $\varepsilon = \frac{1}{2\nu}$

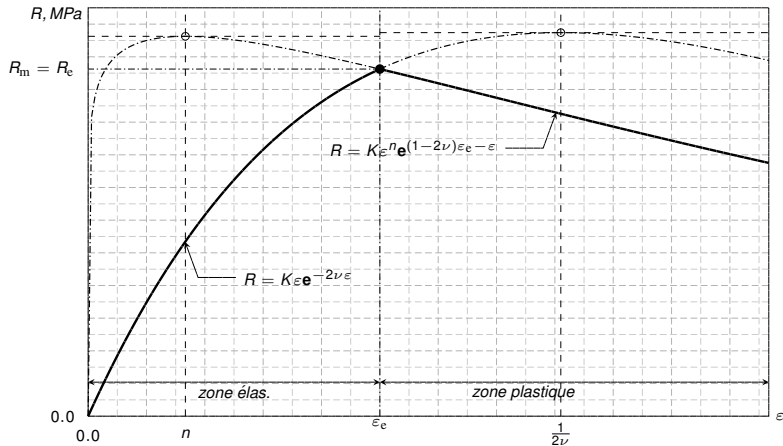




## A 12: Courbe de traction pour un mat. dur (suite)

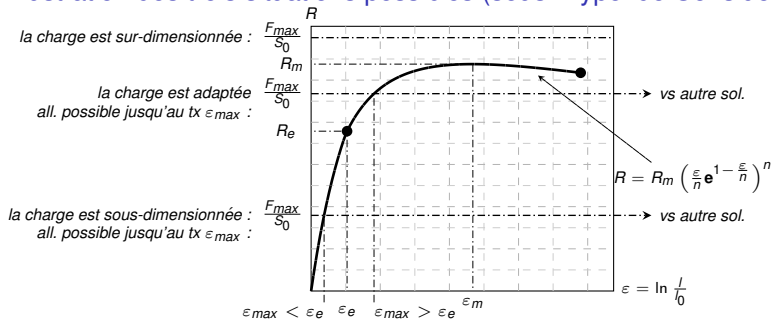
Exemple de courbe de traction : cas  $\varepsilon_e < \frac{1}{2\nu}$  mais  $\varepsilon_e > n$

- La contrainte nominale maximale est réalisée en limite élastique !



# A 13: Inversion de la fonction de traction

Illustration des trois situations possibles (sous l'hypo. de Considère)



- Le taux de déf. atteignable  $\epsilon_{max}$  avec une charge adaptée  $F_{max}$  satisfait :

$$\frac{F_{max}}{S_0} = R_m \left( \frac{\epsilon_{max}}{n} e^{1 - \frac{\epsilon_{max}}{n}} \right)^n . \quad \text{(Equation de la déformation maximale)}$$

# A 14: Calcul des taux de déformation, cas plastique

## Problème

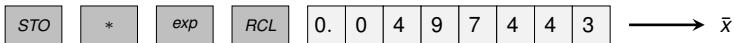
- On reçoit un matériau recuit de caractéristiques connues.
  - Il faut calculer le taux de déformation réel d'une barre de section  $S_0 = 150.0 \text{ mm}^2$  soumise à une force de traction de  $F = 90 \text{ kN}$ .

<i>limite élastique</i>	<i>résistance</i>	<i>coeff. Poisson</i>	<i>coeff. écr.</i>
$R_e = 450 \text{ MPa}$	$R_m = 904.2 \text{ MPa}$	$\nu = 0.400$	$n = 0.2$

**Tab. 1** Données relatives au matériau

$$\frac{F}{S_0} = 600.0 \text{ MPa} \geq R_e \text{ (cas plastique)}$$

$$\alpha = \frac{1}{e} n \sqrt{\frac{F}{R_m S_0}}$$



$$\downarrow \varepsilon = n\bar{\alpha}$$

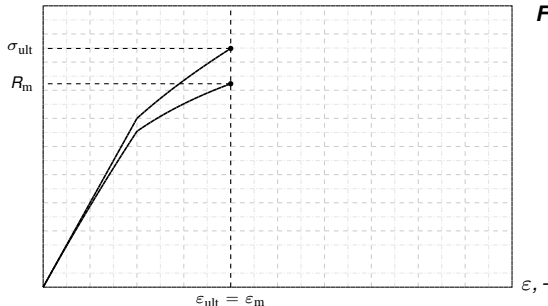
$$\varepsilon = 0.0099488$$

## A 15: Résistance et contrainte ultime

### Cas du matériau fragile

- Dans le cas d'un matériau fragile, la différence entre la résistance et la contrainte de traction ultime est moindre. On a généralement que  $R_m \simeq \sigma_{ult}$ .

$\sigma, R, Pa$

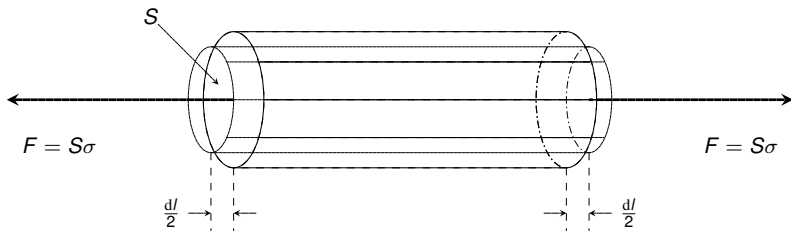


**Fig.** courbes de traction, matériau fragile

- **N.B.** Pour évaluer la tenue des matériaux sous charge externes, la valeur à utiliser pour la **résistance ultime à la traction (UTS)** est  $R_m$ , car le calcul des forces se fait (généralement) par rapport à la **géométrie initiale non déformée**.

# A 16: Episode de traction (allongement $dl$ de l'échantillon)

## Représentation schématique



- *Le travail effectué vaut*

$$dA = F \frac{dl}{2} + F \frac{dl}{2} = Fdl = S\sigma dl = Sl\sigma \frac{dl}{l}$$

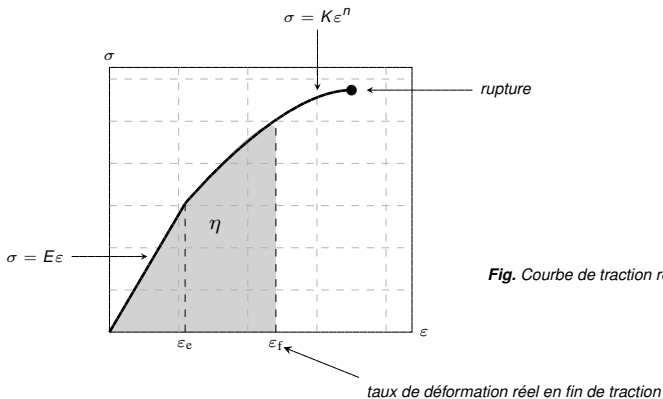
- *Comme  $Sl = V$  et que  $\frac{dl}{l} = d\varepsilon$ , on conclut que*

$$dA = V\sigma d\varepsilon$$

# A 17: Energie spécifique et courbe de traction réelle

## Interprétation de l'énergie spécifique de déformation

- L'énergie spécifique de déformation  $\eta = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon$ , s'interprète comme l'aire sous la courbe de traction réelle.

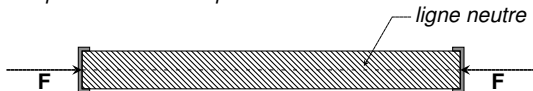


**Fig.** Courbe de traction réelle

# A 18: Theorie du flambage

Etats de déformation d'un éch. de compr. (longueur  $l_0$ , section  $S_0$ )

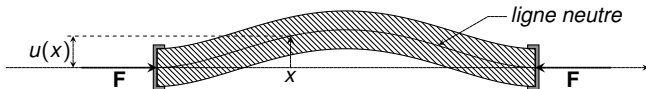
- L'état de déformation d'un échantillon de compression (longueur  $l_0$ , section  $S_0$ ) est en principe un état de compression uniforme :



- Si le rapport entre la contrainte nominale  $R = \frac{F}{S_0}$  et le module d'Young  $E$  de la matière passe au-dessus d'un seuil :

$$\frac{R}{E} \geq \frac{S_0}{4\pi I_0^2}$$

alors il existe d'autres conf. d'équilibre, impliquant (par exemple) des flexions



- On appelle **flambage** la bifurcation vers ces nouveaux états de déformation.

## A 19: Matériau résistant, matériau tenace

### Matériau résistant

- *ne pourra être mis en forme qu'en déployant une force importante,*



### Matériau tenace

- *ne pourra être mis en forme qu'en dépensant beaucoup d'énergie,*





## A 20: Propriétés mécaniques de quelques matériaux

### Propriétés mécaniques essentielles de certains matériaux

<b>Matériau</b>	$R_m$ [MPa]	$R_e$ [MPa]	$E$ [GPa]	$\nu$	$\epsilon_{ult}$
<b>Acier ordinaire</b>	300/1100	200/900	210	0.3	0.17
<b>Acier hautes carac.</b>	1100/1800	1000/1700	210	0.3	-
<b>Acier inox. aust.</b>	-	180/240	195	0.3	0.4
<b>Alliages aluminium</b>	200/600	100/500	70	0.34	0.05/0.30
<b>Titane</b>	650	500	110	0.34	0.35/0.55
<b>Cuivre (forgé)</b>	215/930	49/420	115/132	0.31	0.015/0.55
<b>Laiton</b>	159/896	69/683	97/115	0.33	0.03/0.68
<b>Bronze</b>	96/1010	69/793	41/137	0.31	0/0.7

## A 21: Données physiques

### Coefficient d'érouissage pour différents matériaux

<b>Matériau</b>	<i>n</i>
<b>Acier doux</b> (0.05%C) .....	0.26
<b>Acier à haute résistance</b> (SAE 4340) .....	0.15
<b>Acier trempé et revenu</b> (0.6%C) .....	0.15
<b>Laiton recuit</b> (70Cu/30Zn) .....	0.49
<b>Laiton déformé à froid</b> (70Cu/30Zn) .....	0.19
<b>Nickel recuit</b> .....	0.43
<b>Nickel déformé à froid</b> .....	0.07
<b>Aluminium recuit</b> .....	0.15

## A 22: Données physiques

Résistance au cisaillement (mesurée en essais de coupe)

<b>Matériau</b>	$\tau_S$ (ou $\tau_{ult}$ ), MPa
<b>Fer</b> .....	370
<b>Acier</b> (0.13%C) .....	480
<b>Acier</b> (Ni-Cr-V) .....	690
<b>Acier</b> (austénitique inoxydable) .....	630
<b>Nickel</b> .....	420
<b>Cuivre</b> (recuit) .....	250
<b>Cuivre</b> (travaillé à froid) .....	270
<b>Laiton</b> (70Cu/30Zn) .....	370
<b>Aluminium</b> .....	97
<b>Magnésium</b> .....	125
<b>Plomb</b> .....	36