Haute école de gestion
Economie d'entreprise
Information et documentation
Informatique de gestion

EXAMEN
21 janvier 2010

FILIÈRE : Informatique de Gestion
MODULE : 643, Méthodes numériques
UNITÉ DE COURS : probabilités & matrices
DATE : jeudi 21 janvier 2010
DURÉE : 90 minutes
Nombre de pages ci-après (non compris la présente couverture) : 5

Étudiant-e

NOM :	PRÉNOM :

Examinateurs

NOM : Sievering	PRÉNOM : Johann

NB POINTS : ....

NOTE (0-6) **: ....**

Nom :

Prénom :

Modalités

- Vous disposez de votre formulaire **NON ANNOTE** et votre calculatrice.
- Toutes vos réponses et tous vos raisonnements figureront sur le présent énoncé (utilisez le verso le cas échéant. Dans ce cas, indiquez-le clairement et numérotez vos réponses).
- Vous rendrez tous vos brouillons avec votre copie.
- Évitez de dégrafer le présent énoncé. Si vous le faites, **inscrivez votre nom sur chaque page**.

I BON APPETIT — 1 pt

Dans le restaurant d'une grande entreprise de production de puces électroniques, à chaque repas deux desserts sont proposés. La probabilité que l'un des deux desserts soit une glace est de 0.4 et celle que ce soit un fruit est de 0.8. La probabilité que ce soit une glace et un fruit est 0.3.

Questions :

Calculer la probabilité que vous soit proposé :

1. Une glace et pas un fruit ;
2. Un fruit et pas une glace ;
3. Ni une glace, ni un fruit.

Réponses :

Soit G pour le dessert glace et F pour le dessert fruit.

Nous avons : $P(G) = 0.4,\ P(F) = 0.8\ et\ P(G \cap F) = 0.3$

$$P(G) = P(G \cap F) + P(G \cap \bar{F}) = 0.4 \quad \text{donc} \quad P(G \cap \bar{F}) = 0.4 - P(G \cap F) = 0.1$$
$$P(F) = P(G \cap F) + P(\bar{G} \cap F) = 0.8 \quad \text{donc} \quad P(\bar{G} \cap F) = 0.8 - P(G \cap F) = 0.5$$

Il est alors possible de calculer :

1. $P(G \cap \bar{F}) = 0.1$
2. $P(\bar{G} \cap F) = 0.5$
3. $P(\bar{G} \cap \bar{F}) = 1 - P(G \cup F)$

Or $\quad P(G \cap F) = P(G) + P(F) - P(G \cap F) = 0.4 + 0.8 - 0.3 = 0.9$

Donc $\quad P(\bar{G} \cap \bar{F}) = 1 - 0.9 = 0.1$

II LES BONNES ET MAUVAISES PUCES 1 pt

Trois machines M1, M2 et M3 fabriquent des circuits intégrés (puces). M1 produit 50%, M2 en produit 30% et M3 en produit 20% de la production totale.
Le pourcentage des circuits ne passant pas les tests (défectueux), sont pour M1 de 3%, pour M2 de 4 % et pour M3 de 5%.

Questions :

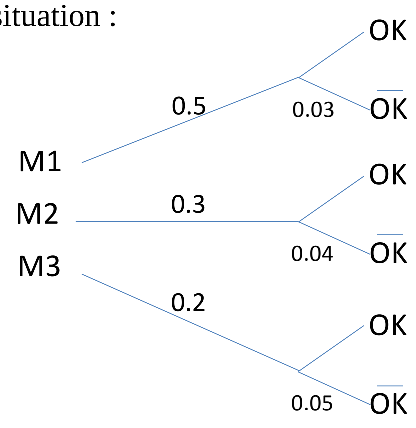
1. Calculez la probabilité qu'une puce prise au hasard dans la production globale soit défectueuse ;
2. Calculez la probabilité qu'une puce prise au hasard dans la production globale soit fabriquée par la machine M1 sachant que cette puce est défectueuse.

Réponses :

Soient :

- $OK\ les\ puces\ NON\ défectueuses$
- $\overline{OK}\ les\ puces\ défectueuses$

Soit l'arbre de la situation :



On obtient alors pour la question 1:

$$P(\overline{OK} \cap M1) = P(M1)P(\overline{OK}|M1) = 0.5 \cdot 0.03 = 0.015$$
$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{OK}} \cap \mathrm{M2}) = \mathrm{P}(\mathrm{M2})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{OK}}|\mathrm{M2}) = 0.3 \cdot 0.04 = 0.012$$
$$P(\overline{OK} \cap M3) = P(M3)P(\overline{OK}|M3) = 0.2 \cdot 0.05 = 0.01$$

Alors :

$$P(\overline{OK}) = P(\overline{OK} \cap M1) + P(\overline{OK} \cap M2) + P(\overline{OK} \cap M3) = 0.037$$

Avec la formule de Bayes

$$P(M1|\overline{OK}) = \frac{P(M1)\cdot P(\overline{OK}|M1)}{P(\overline{OK})} = \frac{0.5\cdot 0.03}{0.037} = \frac{0.015}{0.037} = 0.4$$

III TOP CHRONO POUR LA PRODUCTION DE PUCES 1.5 pt s

Trois machines M1, M2 et M3 produisent des puces électroniques. Mais il n'est possible de faire fonctionner que deux machines simultanément. Le données ci-dessous présentent la production dans les diverses combinaisons de couples de machines fonctionnant simultanément dans un temps donné.

Les couples de machines :
M1 et M2 produisent 4'500 puces en 6 heures ;
M1 et M3 produisent 3'600 puces en 8 heures ;
M2 et M3 produisent 4'900 puces en 7 heures.

(Remarque : cet exercice n'a aucun lien avec l'exercice précédent).

Question :

Combien de puces sont produites par chaque machine en 1 heure ?

Pour élaborer votre solution, vous utiliserez le calcul matriciel. La méthode de résolution matricielle vous est laissée libre.

Conseils : écrivez en premier le système linéaire en choisissant correctement les variables par rapport à la solution que vous cherchez.

Réponses :

On pose : x = nombre de pièces produites par M1 en 1 heure
y = nombre de pièces produites par M2 en 1 heure
z = nombre de pièces produites par M3 en 1 heure

Le système d'équations linéaires est :

$$\begin{cases} 6(x+y) = 4'500 \\ 8(x+z) = 3'600 \\ 7(y+z) = 4'900 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} (x+y) = 750 \\ (x+z) = 450 \\ (y+z) = 700 \end{cases}$$

Solutions :

$$\begin{cases} x = 250 \\ y = 500 \\ z = 200 \end{cases}$$

IV GESTION DE PUCES 1 pt

Le stock des puces contient des puces de type P1 et P2 chacune dans un packaging différent DIL et CMS. Les prix de chaque puce sont respectivement : 10 et 20 CHF.
L'inventaire du magasin est le suivant :

	DIL	*CMS*
P1	*9*	*3*
P2	*10*	*3*

(Remarque : cet exercice n'a aucun lien avec l'exercice précédent).

Questions :

1. Organisez ces données en une matrice d'inventaire A et une matrice de prix B de telle sorte que le produit C = AB soit défini ;
2. Calculez C (avec la méthode matricielle de votre choix) ;
3. Expliquez la signification de l'élément $C_{1,1}$ de C.

Réponses :

Point 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Point 2 :

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 \cdot 10 + 10 \cdot 20 \\ 3 \cdot 10 + 3 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Point 3 :

$C_{1,1}$ = 290 CHF représente la facture que le stock émettrait si toutes les puces de packaging DIL étaient livrées.

V MATRICE : TECHNIQUE 1.5 pt

Soit les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Questions :

Trouvez les solutions (le X) des deux équations matricielles suivantes en utilisant **l'inversion matricielle** (ce sont deux exercices distincts) :

1. MX + N = X
2. MX + N = P

(Conseil : résolvez en premier les équations matricielles avant d'en faire les résolutions).

Réponses :

Point 1 :

MX + N = P
MX = P – N
X = M^{-1}(P - N)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5.2-3.3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 1 . \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -34 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -34 & 7 \end{pmatrix}}$$

Point 2 :

MX + N = X
MX = X – N
MX – X = - N
(M – I)X = - N
X = **-(M-I)$^{-1}$** N

$$M - I = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4.1-3.3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(M - I)^{-1}.B = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}$$