h e g

Haute école de gestion
Economie d'entreprise
Information et documentation
Informatique de gestion

CONTRÔLE CONTINU OBLIGATOIRE
12 janvier 2010

FILIÈRE : Informatique de Gestion
MODULE : 643, Méthodes numériques
UNITÉ DE COURS : probabilités & matrices
DATE : mardi 12 janvier 2010
DURÉE : 90 minutes
Nombre de pages ci-après (non compris la présente couverture) : 6

Étudiant-e

NOM :	PRÉNOM :

Examinateurs

NOM : Sievering	PRÉNOM : Johann

NOTE OBTENUE : ....

NOTE CC FACULTATIF : ....

NOTE FINALE : ....

Hes·SO // GENÈVE
Haute Ecole Spécialisée de Suisse occidentale

Modalités

- Vous disposez de votre formulaire **NON ANNOTE** et votre calculatrice.
- Toutes vos réponses et tous vos raisonnements figureront sur le présent énoncé
(utilisez le verso le cas échéant. Dans ce cas, indiquez-le clairement et numérotez vos réponses).
- Vous rendrez tous vos brouillons avec votre copie.
- Évitez de dégrafer le présent énoncé. Si vous le faites, **inscrivez votre nom sur chaque page**.

I PROBABILITES : QUI PORTENT DES LUNETTES ? 1 pt

On compte dans une population : 45% d'hommes et 55% de femmes. Un homme sur trois porte des lunettes et une femme sur cinq porte des lunettes.

Questions :

1. Quelle est la probabilité qu'une personne portant des lunettes soit une femme ?

Réponses :

Admettons les notations suivantes: H: homme, F: femme et L: lunettes.
On obtient alors les relations suivantes:
$P(H \cap L) = P(H)P(L|H) = 0.45 \times 0.33 = 0.15$
$P(F \cap L) = P(F)P(L|F) = 0.55 \times 0.2 = 0.11.$
Donc $P(L) = P(H \cap L) + P(F \cap L) = 0.26.$

Finalement

$$P(F|L) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = 0.423\,.$$

Nom :

Prénom :

II PROBABILITES : BOULES NOIRES ET BLANCHES — 1 pt

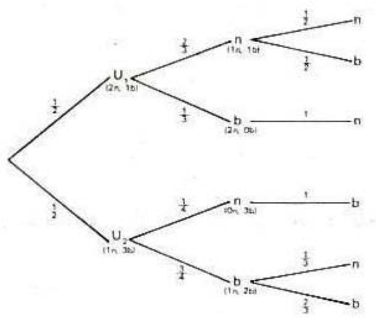
On a deux urnes extérieurement identiques : U_1 contient 2 boules noires et une blanche, U_2 une noire et 3 blanches.
On choisit au hasard une des urnes puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).

Questions :

1. Dessinez l'arbre correspondant à l'énoncé ci-dessus
2. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier lieu une boule noire ?
3. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?
4. Quelle probabilité a-t-on de tirer une seconde boule noire si l'on sait que la première était blanche ?
5. Quelle probabilité a-t-on d'avoir tire U_1 si la seconde boule tirée est noire ?

Réponses :

1. Dessinez l'arbre correspondant à l'énoncé ci-dessus



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$$

2. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier lieu une boule noire ?

$$P((-,-,n)) = P((U_1,n,n)\cup(U_1,b,n)\cup(U_2,b,n)) =$$
$$= P((U_1,n,n)) + P((U_1,b,n)) + P((U_2,b,n)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} = \frac{11}{24}$$

3. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?

$$P((-,n,n)\cup(-,b,b)) = P((U_1,n,n)\cup(U_2,b,b)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

4. Quelle probabilité a-t-on de tirer une seconde boule noire si l'on sait que la première était blanche ?

$$P((-,-,n)/(-,b,-)) = \frac{P((-,b,n))}{P((-,b,-))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{13}$$

5. Quelle probabilité a-t-on d'avoir tire U_1 si la seconde boule tirée est noire ?

$$P((U_1,-,-)/(-,-,n)) = \frac{P((U_1,-,n))}{P((-,-,n))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{11}$$

Nom :

Prénom :

III EQUATIONS LINEAIRES : LA COMMANDE DE BLOC-NOTES 1 pt

Le prix d'entrée pour une pièce de théâtre était de 3,00 CHF pour les étudiants et de 4,50 CHF pour les autres. 450 billets ont été vendus pour un total de 1'555,50 CHF.

Questions :

1. Combien de billets de chaque catégorie ont été achetés ?

Réponses :

On pose $\begin{cases} x = \text{billet pour un étudiant} \\ y = \text{billet pour un non étudiant} \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x + y = 450 \\ 3x + (4.5)y = 1555.50 \end{cases} \Big| (-3) \longrightarrow$

$$\begin{array}{r} -3x - 3y = -1350 \\ 3x + (4.5)y = 1555.50 \\ \hline 0 + (1.5)y = 205.5 \end{array}$$

Donc $y = 137$. Et $x = 450 - y = 450 - 137 = 313$

313 billets pour étudiants et 137 billets pour non étudiants ont été vendus.

IV MATRICE : CONSTRUCTIONS 1 pt

*Un entrepreneur a des **mandats** pour construire : 4 studios (S). 10 appartements deux pièces (2P) et 6 appartements trois pièces (3P). Les **coûts** (en milliers de francs) de la main d'œuvre et du matériel sont synthétisés dans le tableau ci-dessous :*

Coûts	**S**	**2P**	**3P**
Main d'œuvre	*34*	*40*	*43*
Matériel	*50*	*60*	*67*

Questions :

1. Organisez ces données (du tableau ci-dessus et de l'énoncé) en une matrice de ***mandats*** A et une matrice des **coûts** B de telle sorte que le produit C = A.B soit défini.
2. Calculez C.
3. Donnez la signification de chaque élément de C.

Réponses :

Point 1 :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{34} & \mathbf{50} \\ \mathbf{40} & \mathbf{60} \\ \mathbf{43} & \mathbf{67} \end{pmatrix}$$

Point 2 :

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{794} & \mathbf{1202} \end{pmatrix}$$

Point 3 :

C_{11} : 794'00 CHF correspond au coût de la main d'œuvre
C_{12} : 1'202'00 CHF correspond au prix du matériel

V MATRICE : TECHNIQUE 1 pt

Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Questions :

Trouvez la solution des équations matricielles suivantes en utilisant **l'inversion matricielle** (aide : ce sont des matrices 2x2) :

1. AX + B = C
2. AX + B = X

Indication

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Réponses :

Point 1 :

AX + B = C
AX = C – B
X = $\mathbf{A^{-1}}$(C-B)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5.2-3.3}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -34 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -34 & 7 \end{pmatrix}}$$

Point 2 :

AX + B = X
AX = X – B
AX – X = -B
(A – I)X = -B
X = **-(A-I)$^{\mathbf{-1}}$**B

$$A - I = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4.1-3.3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-(A-I)^{-1}.B = +\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = +\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Nom :

Prénom :

VI MATRICE : LE BON CAFE 1 pt

Un magasin est spécialisé dans la préparation de mélanges de cafés. A partir de cafés colombien, brésilien et kenyan, le préparateur aimerait préparer des paquets d'une livre qui se vendraient à 8,50 CHF.
Le prix de la livre de ces cafés est respectivement 10,00 CHF (colombien), 6,00 CHF (brésilien) et 8,00 CHF (kenyan).
La quantité de café colombien doit être trois fois supérieure à celle du café brésilien.

Questions :

Trouvez la quantité de chaque sorte de café dans le mélange.

Vous utiliserez pour résoudre ce problème des matrices. La technique de résolution vous est laissée libre.

Conseil : posez le système d'équations linéaires en premier, exprimez-le sous la forme de matrices et finalement résolvez votre équation matricielle.

Réponses :

On pose $\begin{cases} x = \text{café colombien} \\ y = \text{café brésilien} \\ z = \text{café kenyan} \end{cases}$

le système est

$$x + y + z = 1$$
$$10x + 6y + 8z = 17/2$$
$$x - 3y = 0$$

Solutions $x = 3/8$, $y = 1/8$, $z = 1/2$.