Ex 1.

1. $\|x_1\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$

$\|x_2\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17} = 4.1231$

2. $\vec{x}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (12, 5)^T$

$\|x_3\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

Remarquons que $\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \neq \|x_3\|^2$

Ex 2.

1. $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 = 0$. Donc $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$

2. $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$. Donc $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$

Ex 3.

1. $\cos(\theta) = \dfrac{v^T w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{42}{\sqrt{14 \cdot 126}} = \dfrac{42}{42} = 1$. Or $\arccos(1) = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont confondus.

2. Comme $v^T \cdot w = 0$ alors $\cos(\theta) = 0$. Or $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ $(90°)$

Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires

3. $\cos(\theta) = \dfrac{v^T \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{14}{\sqrt{17 \cdot 13}} = 0.9417$. Or $\arccos(0.9417) = 19.65° \sim 20°$

4. $\cos(\theta) = \dfrac{v^T \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{8}{\sqrt{14 \cdot 21}} = 0.466$. Or $\arccos(0.466) = 62.18° \sim 62°$

Ex 4.

1. Le vecteur correspondant à la recherche est :

$$X = (0,0,0,0,0,1,1,0,0,1)^T$$

$$\frac{X}{\|X\|} = (0,0,0,0,0,0.57735,\ 0.57735,\ 0,0,\ 0.57735)^T$$

Donc $$Q^T \cdot \frac{X}{\|X\|} = (0,\ 0.2286,\ 0.5669,\ 0.3308,\ \underline{0.6350},\ 0.5775, 0, 0.5346)^T$$

La valeur la plus grande est 0.6350. Donc le chapitre correspondant le mieux à la recherche est le chapitre 5.

2. Cette fois : $$X' = (0,0,0,0,0,2,1,0,0,1)^T$$

$$\frac{X'}{\|X'\|} = (0,0,0,0,0,\ 0.8165,\ 0.4082,\ 0,0,\ 0.4082)$$

Donc $$Q^T \cdot \frac{X'}{\|X'\|} = (0,\ 0.1616,\ 0.40,\ 0.2339,\ 0.6123,\ \underline{0.6532}, 0, 0.5041)$$

Le chapitre recherché est le chapitre 6.

Ex 5.

La matrice correspondant aux résultats des écoliers est

$$A = \begin{pmatrix} 61 & 53 & 53 \\ 63 & 73 & 78 \\ 78 & 61 & 82 \\ 65 & 84 & 96 \\ 63 & 59 & 71 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice des écarts :

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\ }^{x_1} & \overbrace{\ }^{x_2} & \overbrace{\ }^{x_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & -13 & -23 \\ -3 & 7 & 2 \\ 12 & -5 & 6 \\ -1 & 18 & 20 \\ -3 & -7 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$