h e g

Haute école de gestion
Economie d'entreprise
Information et documentation
Informatique de gestion

# CONTRÔLE CONTINU
# 27 OCTOBRE 2009

FILIÈRE : Informatique de Gestion

MODULE : 643, Méthodes numériques

UNITÉ DE COURS : Probabilités

DATE : mardi 27 octobre 2009

DURÉE : 90 minutes

Nombre de pages ci-après (non compris la présente couverture) : 5

## Étudiant-e

| NOM : | PRÉNOM : |
|---|---|

## Examinateurs

| NOM : Sievering | PRÉNOM : Johann |
|---|---|

NOTE OBTENUE : ........

**Nom :**

**Prénom :**

# Modalités

- Vous disposez de votre formulaire **NON ANNOTE** et votre claculatrice.
- Toutes vos réponses et tous vos raisonnements figureront sur le présent énoncé
  (utilisez le verso le cas échéant. Dans ce cas, indiquez-le clairement et numérotez vos réponses).
- Vous rendrez tous vos brouillons avec votre copie.
- Évitez de dégrafer le présent énoncé. Si vous le faites, **inscrivez votre nom sur chaque page**.

## I Votre trousseau de clés 1 pts

*Pour rentrer chez vous, vous avez besoin deux clés : une pour ouvrir la porte de votre **m**aison (CM) et l'autre pour ouvrir celle de votre **a**ppartement (CA).*

*Vous avez un trousseau de 5 clés, vous choisissez au hasard deux clés (C1 et C2).*

### Questions :

1. Quelle est la probabilité que les clés choisies soient celles qui vous permettent de rentrer chez vous ?
2. Quelle est la probabilité que C1=CM et C2=CA (il faut d'abord entrer dans votre maison avant d'ouvrir votre porte) ?

### Réponses :

1. Il y a $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ façons de choisir 2 clés sur 5.

   La probabilité est donc $\frac{1}{10} = 0.1$

2. La probabilité de choisir la clé CP est $\frac{1}{5}$.

   Il restent 4 clés, la probabilité de choisir la clé CA est $\frac{1}{4}$.

   La probabilité de choisir les clés est donc $\frac{1}{5} * \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0.05$.

## II Malade ou pas malade ? 1 pts

*Un test est mis en place pour dépister une maladie. Si la personne est effectivement atteinte, alors le test donne un* ***résultat positif*** *dans 99,9% des cas.*
*Si la personne est en bonne santé, le test peut être positif malgré tout (faux positif ), et cela arrive dans 1% des cas pour ce test. On sait que, en moyenne, une personne sur vingt est atteinte de cette maladie.*

### Questions :

On pratique ce test sur un individu et il est positif.
Quelle est la probabilité pour qu'il soit effectivement malade ?

### Réponses :

Sur un espace $\Omega$, on note

- $M$ l'événement « la personne testée est malade »,
- $S$ l'événement « la personne n'est pas malade (i.e. est saine) »,
- $Po$ l'événement « le test est positif »,
- $N$ l'événement « le test est négatif ».

L'énoncé fournit les probabilités suivantes :

$$\mathbf{P}(Po|M) = 0,999 \qquad \mathbf{P}(Po|S) = 0,01 \qquad \mathbf{P}(M) = 0,05.$$

La probabilité à calculer est $\mathbf{P}(M|Po)$. On utilise pour cela la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}(M|Po) = \frac{\mathbf{P}(Po|M)\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(Po|M)\mathbf{P}(M) + \mathbf{P}(Po|S)\mathbf{P}(S)} = \frac{0.999 \times 0.05}{0.999 \times 0.05 + 0.01 \times 0.95} = \frac{0.04995}{0.05945} \simeq 0.840$$

La probabilité que la personne soit malade sachant que son test est positif est donc de 84%.

**Nom :**

**Prénom :**

## III LA BOITE DEFECTUEUSE 1,5 pts (~5-7 minutes)

*Le gérant d'un magasin informatique a reçu un lot de boîtes de DVD.*
*5% des boîtes sont abîmées.*
*Le gérant estime que 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un DVD défectueux et 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucun DVD défectueux.*
*Un client achète une boîte de ce lot. On désigne par A l'événement : « la boîte est* ***a****bîmée » et par D l'événement : « la boîte achetée contient au moins un DVD* ***d****éfectueux ».*

## Questions :

1. Donner les probabilités : P(A), P($\bar{A}$), P(D | A), P(D | $\bar{A}$), P($\bar{D}$ | A) et P($\bar{D}$ | $\bar{A}$)
2. Le client constate qu'un DVD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

## Réponses :

1. Les probabilités :
    a. P(A) = 0.05 d'après l'énoncé (5%)
    b. P($\bar{A}$) = 1 - P(A) = 0.95
    c. P(D | A ) = 0.6 d'après l'énoncé (60%)
    d. P($\bar{D}$| A ) = 0.4
    e. P($\bar{D}$ | $\bar{A}$) = 0.98 d'après l'énoncé (98%)
    f. P(D | $\bar{A}$) = 1 – 0.98 = 0.02

2. La probabilité que le client ait acheté une boîte défectueuse :

    Ici, on cherche P(A | D) il faut donc utiliser la formule de Bayes :

$$P(A \mid D) = \frac{\mathrm{P}(D / A).\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(D / A).\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(D / \bar{A}).\mathrm{P}(\bar{A})}$$

Ce qui donne

$$P(A \mid D) = \frac{0{,}6 * 0{,}05}{0{,}6 * 0{,}05 + 0{,}02 * 0{,}95} \approx 0.612$$

**Nom :**

**Prénom :**

## IV BOULES NOIRES ET BLANCHES 1,5 pts (~5-7 minutes)

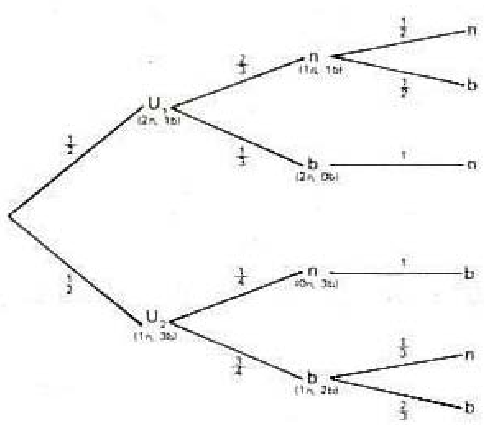
*On a deux urnes exterieurement identiques : $U_1$ contient 2 boules noires et une blanche, $U_2$ une noire et 3 blanches.*
*On choisit au hasard une des urnes puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).*

### Questions :

1. Dessinez l'arbre correspondant à l'énoncé ci-dessus
2. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier lieu une boule noire ?
3. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?
4. Quelle probabilité a-t-on de tirer une seconde boule noire si l'on sait que la première était blanche ?
5. Quelle probabilité a-t-on d'avoir tire $U_1$ si la seconde boule tirée est noire ?

### Réponses :

1. Dessinez l'arbre correspondant à l'énoncé ci-dessus




$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$$

1. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier lieu une boule noire ?

$$P((-,-,n)) = P((U_1,n,n)\cup(U_1,b,n)\cup(U_2,b,n)) =$$
$$= P((U_1,n,n)) + P((U_1,b,n)) + P((U_2,b,n)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$$

2. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?

$$P((-,n,n)\cup(-,b,b)) = P((U_1,n,n)\cup(U_2,b,b)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

3. Quelle probabilité a-t-on de tirer une seconde boule noire si l'on sait que la première était blanche ?

$$P((-,-,n)/(-,b,-)) = \frac{P((-,b,n))}{P((-,b,-))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{13}$$

4. Quelle probabilité a-t-on d'avoir tire $U_1$ si la seconde boule tirée est noire ?

$$P((U_1,-,-)/(-,-,n)) = \frac{P((U_1,-,n))}{P((-,-,n))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{11}$$

**Nom :**

**Prénom :**

## V QUELLE EST CETTE COULEUR ? 1 pts (~5-7 minutes)

*On considère une population composée de 51% de garçons. On suppose que 5 % des garçons et 0.25% des filles naissent daltoniens.*
*(Posez par exemple : D = « être daltonien », G = « être un garçon », F = « être une fille »).*

## Questions :

1. Quelle est la proportion de garçons dans la population de daltoniens (ou quelle est la probabillité qu'un daltonien soit un garçon *ce que vous cherchez, c'est : P (G | D)*) ?
2. Quelle est la proportion de personnes daltoniennes dans cette population (*ce que vous cherchez, c'est : P (D)) ?*

## Réponses :

1. Un daltonien soit un garçon

   On cherche P(G | D)

   Par la formule de Bayes : $P(G \mid D) = \dfrac{P(D/G).P(G)}{P(D/G).P(G)+P(D/F).P(F)}$

   De l'énoncé : P(G) = 0,51
   donc P(F) = 0,49 car (G,F) sont imcompatibles ($G \cap F = \varnothing$)

   De l'énoncé : P(D | G) = 0,05 et P(D | F) = 0,0025.

   Donc $P(G \mid D) = \dfrac{0{,}05.0{,}51}{0{,}05.0{,}51+0{,}0025.0{,}49} = \dfrac{0{,}0255}{0{,}026725} = 0{,}954$

2. proportion de personnes daltoniennes

   On cherche (G, F) sachant qu'ils sont incompatibles $G \cap F = \varnothing$ alors :

   $P(D) = P(D_{garçon}) + P(D_{fille})$ on a également : $D_{garçon} \subseteq G$ et $D_{fille} \subseteq F$

   $P(D) = P(D/G).P(G)+P(D/F).P(F) =$ 0,026725 ≈ 2,5%.