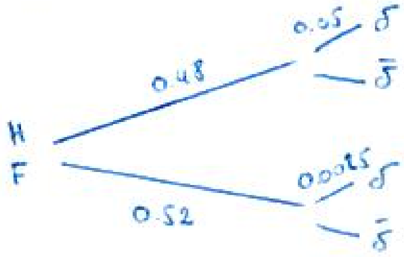
MATHÉMATIQUES MODULE 643 — IGS - HEG - GENEVE

Réponses — **Série 4** — **Probabilités**

Exercice 1

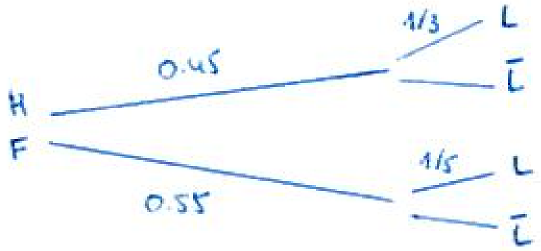
Admettons les notations suivantes: H: homme, F: femme et δ: daltonien.
Utilisons un arbre pour décrire la situation:



On obtient alors les relations suivantes:
$P(H \cap \delta) = P(H)P(\delta|H) = 0.05 \times 0.48 = 0.024$
$P(F \cap \delta) = P(F)P(\delta|F) = 0.0025 \times 0.52 = 0.0013.$
Le résultat est donc $P(\delta) = P(H \cap \delta) + P(F \cap \delta) = 0.0253$

Exercice 2

Admettons les notations suivantes: H: homme, F: femme et L: lunettes.
Utilisons un arbre pour décrire la situation:



On obtient alors les relations suivantes:
$P(H \cap L) = P(H)P(L|H) = 0.45 \times 0.33 = 0.15$
$P(F \cap L) = P(F)P(L|F) = 0.55 \times 0.2 = 0.11.$
Donc $P(L) = P(H \cap L) + P(F \cap L) = 0.26.$

Finalement

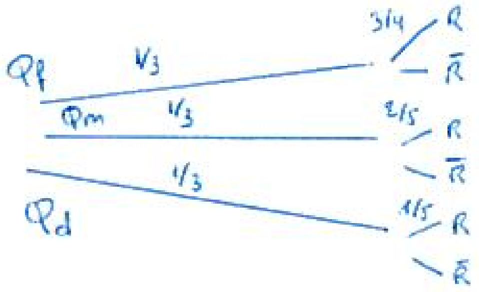
$$P(F|L) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = 0.423\,.$$

Exercice 3

Admettons les notations suivantes:
Q_f = question facile, Q_m: question moyenne, Q_d: question difficile et R: réponse correcte.
On a la même chance de tirer une question:

$$P(Q_f) = P(Q_m) = P(Q_d) = \frac{1}{3}\,.$$

Utilisons un arbre pour décrire la situation:



On obtient alors les relations suivantes:
$P(Q_f \cap R) = P(Q_f)P(R|Q_f) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = 0.25$
$P(Q_m \cap R) = P(Q_m)P(R|Q_m) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = 0.13$
$P(Q_d \cap R) = P(Q_d)P(R|Q_d) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = 0.07$

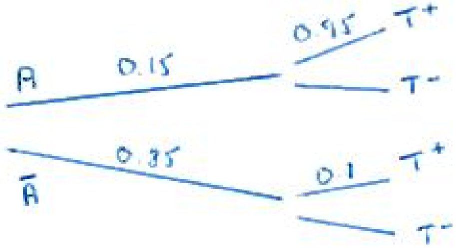
Donc $P(R) = P(Q_f \cap R) + P(Q_m \cap R) + P(Q_d \cap R) = 0.45$.

Finalement

$$P(Q_f|R) = \frac{P(Q_f \cap R)}{P(R)} = 0.56\,.$$

Exercice 4

Admettons les notations suivantes:
A: être atteint par l'affection, $\overline{A}$: ne pas être atteint par l'affection,
T^+: test positif, T^-: test négatif.
Utilisons un arbre pour décrire la situation:



On obtient alors les relations suivantes:
$P(A \cap T^+) = P(A)P(T^+|A) = 0.15 \times 0.95 = 0.14$
$P(\overline{A} \cap T^+) = P(\overline{A})P(T^+|\overline{A}) = 0.85 \times 0.1 = 0.09$
Donc $P(T^+) = P(A \cap T^+) + P(\overline{A} \cap T^+) = 0.23$.

$P(A \cap T^-) = P(A)P(T^-|A) = 0.15 \times 0.05 = 0.008$
$P(\overline{A} \cap T^-) = P(\overline{A})P(T^-|\overline{A}) = 0.85 \times 0.9 = 0.77$
Donc $P(T^-) = P(A \cap T^-) + P(\overline{A} \cap T^-) = 0.78$.

a.

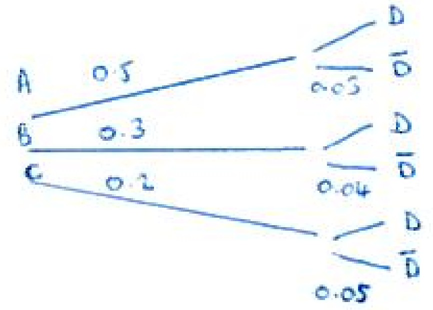
$$P(A|T^+) = \frac{P(A \cap T^+)}{P(T^+)} = 0.61\,.$$

b.

$$P(\overline{A}|T^-) = \frac{P(\overline{A} \cap T^-)}{P(T^-)} = 0.99\,.$$

Exercice 5

Admettons les notations suivantes: D: pièce non défectueuse, $\overline{D}$: pièce défectueuse.
Utilisons un arbre pour décrire la situation:



1) On obtient alors les relations suivantes:
$P(\overline{D} \cap A) = P(A)P(\overline{D}|A) = 0.5 \times 0.03 = 0.015$
$P(\overline{D} \cap B) = P(B)P(\overline{D}|B) = 0.3 \times 0.04 = 0.012$
$P(\overline{D} \cap C) = P(C)P(\overline{D}|C) = 0.2 \times 0.05 = 0.01$

On obtient donc

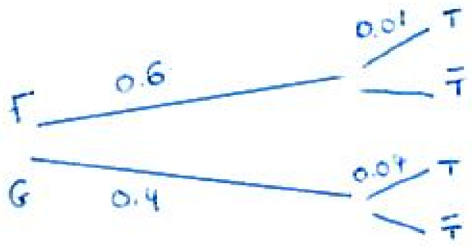
$$P(\overline{D}) = P(\overline{D} \cap A) + P(\overline{D} \cap B) + P(\overline{D} \cap C) = 0.037$$

2) D'après le théorème de Bayes

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A)P(\overline{D}|A)}{P(\overline{D})} = 0.4$$

Exercice 6

Admettons les notations suivantes: F: fille, G: garçon et T: élève mesurant plus de 1.65 mètres.
Utilisons un arbre pour décrire la situation:



On obtient alors les relations suivantes:
$P(G \cap T) = P(G)P(T|G) = 0.4 \times 0.04 = 0.016$?
$P(F \cap T) = P(F)P(T|F) = 0.6 \times 0.01 = 0.06.$

Donc $P(T) = P(G \cap T) + P(F \cap T) = 0.076$.

D'après le théorème de Bayes

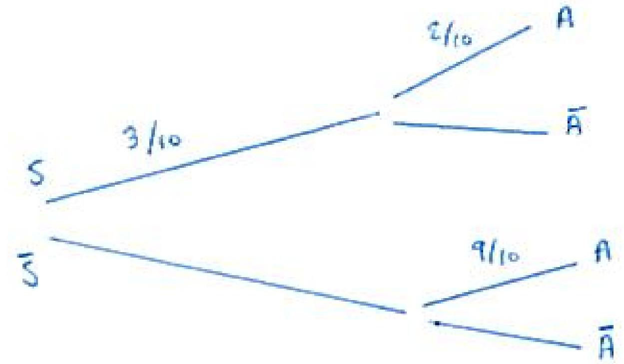
$$P(F|T) = \frac{P(F)P(T|F)}{P(T)} = 0.27$$

Ex 7.

A = "être dans les 50 premiers"

S = "temps ensoleillé"

Utilisons un arbre pour décrire la situation



On veut calculer $P(\bar{S} \mid 14^{\text{ème}} \text{ place}) = \dfrac{P(\bar{S} \cap A)}{P(A)}$

Or $P(A) = P(S)\,P(A/S) + P(\bar{S}) \cdot P(A/\bar{S}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0.69$

Donc $\dfrac{P(\bar{S} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.63}{0.69} = 0.913$