MATHÉMATIQUES MODULE 643 IGS - HEG - GENEVE

Réponses **Série 3** **Probabilités**

Exercice 1

Soient les événements suivants: $A = \{1, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et donc $A \cap B = \{6\}$. Alors on obtient la relation suivante:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Exercice 2

a. Considérons les deux ensembles suivants:
$A =$ " somme des points égale 8" $= \{(2,6), (3,5)(4,4), (5,3), (6,2)\}$
et $D =$ " double " $= \{(1,1), (2,2)(3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
On calcule:

$$P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}.$$

b. Soit l'ensemble:
$B =$ " somme des points plus grande ou à égale 10" $= \{(4,6), (5,5)(5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

On calcule:

$$P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}.$$

Ex 3.

1. $P(4\,\text{As}) = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = 0.0143$

2. $P(\text{au moins } 1\,\text{As}) = 1 - P(0\,\text{As}) = 1 - 0.0143 = 0.9857$

3. $P(4\,\text{Rouges}) = P(4\,\text{As}) = 0.0143$

4. $P(4\,\text{coul. diff.}) = 4!\ \dfrac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = 0.2286$

Les couleurs peuvent apparaître dans un ordre quelconque

5. $P(4\,\text{As} \mid 1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As}) = \dfrac{P(4\,\text{As et } 1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As})}{P(1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As})} = \dfrac{P(4\,\text{As})}{P(1^{\text{ère}}\,\text{carte} = 1\,\text{As})} = \dfrac{\cancel{\frac{4}{8}}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\cancel{\frac{4}{8}}} = 0.0286$

6. $P(4\,\text{As} \mid 1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As R.}) = \dfrac{P(4\,\text{As et } 1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As R.})}{P(1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As R.})} = \dfrac{\cancel{\frac{2}{8}}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\cancel{\frac{2}{8}}} = 0.0286$

7. $P(4\,\text{As} \mid 1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As Coeur}) = \dfrac{P(4\,\text{As et } 1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As Coeur})}{P(1^{\text{ère}}\,\text{carte} = \text{As Coeur})} = \dfrac{\cancel{\frac{1}{8}}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\cancel{\frac{1}{8}}} = 0.0286$

Ex 4.

1. $P(2 \text{ As}) = \dfrac{4 \cdot 3}{8 \cdot 7} = 0.214$

2. $P(2 \text{ As rouges}) = \dfrac{2 \cdot 1}{8 \cdot 7} = 0.036$

3. $P(\text{au moins un As}) = 1 - P(0 \text{ As}) = 1 - 0.214 = 0.786$

4. $P(2 \text{ As} / \text{au moins un As}) = \dfrac{P(2 \text{ As})}{P(\text{au moins un As})} = \dfrac{0.214}{0.786} = 0.272$

5. $P(2 \text{ As} / \text{au moins un As rouge}) = \dfrac{P(2 \text{ As et au moins un As rouge})}{P(\text{au moins un As rouge})} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

avec $P(A) = P(2 \text{ As}) - P(2 \text{ As noirs}) = 0.214 - \dfrac{2 \cdot 1}{8 \cdot 7} = 0.178$

$P(B) = 1 - P(0 \text{ As rouge}) = 1 - \dfrac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} = 0.467$

Donc $\dfrac{P(A)}{P(B)} = 0.383$

6. $P(2 \text{ As} \mid \text{As de coeur}) = \dfrac{P(2 \text{ As dont l'As de coeur})}{P(\text{As de coeur})} = \dfrac{\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{8} \cdot 1} = \dfrac{3}{7} = 0.428$

Ex 5.

1. $P(\text{As pique, As coeur, As trèfle, As carreau}) = \dfrac{1}{36} \cdot \dfrac{1}{35} \cdot \dfrac{1}{34} \cdot \dfrac{1}{33} \cong 7.07 \cdot 10^{-7}$

2. $P(4 \text{ As}) = \dfrac{4}{36} \cdot \dfrac{3}{35} \cdot \dfrac{2}{34} \cdot \dfrac{1}{33} \simeq 1.7 \cdot 10^{-5}$

3. $P(4 \text{ As} / 2 \text{ premières cartes sont des As}) = \dfrac{P(4 \text{ As})}{P(2 \text{ As})} = \dfrac{\frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} \cdot \frac{1}{33}}{\frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35}} = \dfrac{2}{33 \cdot 34} \simeq 1.78 \cdot 10^{-3}$

4. $P(1 \text{ As et } 3 \text{ autres cartes}) = 4 \cdot \dfrac{4}{36} \cdot \dfrac{32}{35} \cdot \dfrac{31}{34} \cdot \dfrac{30}{33} \cong 0.3368$

5. $P(\text{au moins } 1 \text{ As}) = 1 - P(0 \text{ As}) = 1 - \dfrac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = 0.3895$

6. $P(\text{au moins un As} \mid 1^{\text{ère}} \text{ carte} \neq \text{As}) = 1 - P(0 \text{ As sur } 3 \text{ cartes parmi } 35)$

$= 1 - \dfrac{31 \cdot 30 \cdot 29}{35 \cdot 34 \cdot 33} = 0.3132$

Exercice 6

Admettons les notations suivantes: H: homme, F: femme et δ: daltonien.
On obtient alors les relations suivantes:
$P(H \cap \delta) = P(H)P(\delta|H) = 0.05 \times 0.48 = 0.024$
$P(F \cap \delta) = P(F)P(\delta|F) = 0.0025 \times 0.52 = 0.0013$.
Le résultat est donc $P(\delta) = P(H \cap \delta) + P(F \cap \delta) = 0.0253$

Exercice 7

Admettons les notations suivantes: H: homme, F: femme et L: lunettes.
On obtient alors les relations suivantes:
$P(H \cap L) = P(H)P(L|H) = 0.45 \times 0.33 = 0.15$
$P(F \cap L) = P(F)P(L|F) = 0.55 \times 0.2 = 0.11$.
Donc $P(L) = P(H \cap L) + P(F \cap L) = 0.26$.

Finalement
$$P(F|L) = \frac{P(F \cap L)}{P(L)} = 0.423\,.$$

Exercice 8

Admettons les notations suivantes:
Q_f = question facile, Q_m: question moyenne, Q_d: question difficile et R: réponse correcte.
On a la même chance de tirer une question:
$$P(Q_f) = P(Q_m) = P(Q_d) = \frac{1}{3}\,.$$

On obtient alors les relations suivantes:
$P(Q_f \cap R) = P(Q_f)P(R|Q_f) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = 0.25$
$P(Q_m \cap R) = P(Q_m)P(R|Q_m) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = 0.13$
$P(Q_d \cap R) = P(Q_d)P(R|Q_d) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = 0.07$

Donc $P(R) = P(Q_f \cap R) + P(Q_m \cap R) + P(Q_d \cap R) = 0.45$.

Finalement
$$P(Q_f|R) = \frac{P(Q_f \cap R)}{P(R)} = 0.56\,.$$

Exercice 9
Admettons les notations suivantes:
A: être atteint par l'affection, $\overline{A}$: ne pas être atteint par l'affection,
T^+: test positif, T^-: test négatif.
On obtient alors les relations suivantes:
$P(A \cap T^+) = P(A)P(T^+|A) = 0.15 \times 0.95 = 0.14$
$P(\overline{A} \cap T^+) = P(\overline{A})P(T^+|\overline{A}) = 0.85 \times 0.1 = 0.09$
Donc $P(T^+) = P(A \cap T^+) + P(\overline{A} \cap T^+) = 0.23$.

$P(A \cap T^-) = P(A)P(T^-|A) = 0.15 \times 0.05 = 0.008$
$P(\overline{A} \cap T^-) = P(\overline{A})P(T^-|\overline{A}) = 0.85 \times 0.9 = 0.77$
Donc $P(T^-) = P(A \cap T^-) + P(\overline{A} \cap T^-) = 0.78.$

a.

$$P(A|T^+) = \frac{P(A \cap T^+)}{P(T^+)} = 0.61\,.$$

b.

$$P(\overline{A}|T^-) = \frac{P(\overline{A} \cap T^-)}{P(T^-)} = 0.99\,.$$

Ex 10.

A = " être dans les 50 premiers" S = " temps ensoleillé "

$P(A/\bar{S}) = \frac{9}{10}$, $P(A|S) = \frac{2}{10}$ et $P(S) = \frac{3}{10}$

On veut calculer $P(\bar{S} / 14^{ème}\ place) = \frac{P(\bar{S} \cap A)}{P(A)}$

Or $P(A) = P(S) \cdot P(A/S) + P(\bar{S}) \cdot P(A/\bar{S}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0.69$
$P(\bar{S} \cap A) = P(A/\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0.63$

Donc $\frac{P(\bar{S} \cap A)}{P(A)} = \frac{0.63}{0.69} = 0.913$