Chapitre 6

Analyse combinatoire

Dans de nombreuses applications du calcul des probabilités, il s'agit de dénombrer tous les cas qui peuvent se présenter dans les problèmes considérés. L'objet de l'analyse combinatoire est d'établir des formules de dénombrement dans diverses situations typiques.

6.1 Arrangements avec répétitions

l'ordre compte

Lorsque l'on considère une suite ordonnée de k objets pris dans un ensemble E ayant n objets au total, on parle d'arrangement. (Si l'ordre n'importe pas, on parle de combinaisons, voir les sections 6.5 et 6.6 ci-après.) Si les objets de la suite peuvent apparaître plusieurs fois, cet arrangement avec répétitions de n objets pris k à k se note $\overline{A}_k^n$, et on a

$$\overline{A}_k^n = n^k \tag{6.1}$$

puisque pour le choix de chaque objet de la suite il y a toujours n possibilités et que l'on opère k choix.

***Exemple* 6.1.**
Combien de mots de deux lettres peut-on former à l'aide des trois lettres A, B, C?
Enumérons toutes les possibilités:
AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC;
il y en a donc 9, et on a bien aussi $\overline{A}_2^3 = 3^2 = 9$.

***Exemple* 6.2.**
Considérons les applications d'un ensemble fini F comptant k éléments vers un ensemble fini G avec n éléments. Chaque application est complètement déterminée

lorsque les images des éléments de F sont connues; cela signifie qu'il y a $\overline{A}_k^n$ applications différentes de F dans G.

6.2 Arrangements sans répétition

Lorsque l'on considère une suite ordonnée de k objets **distincts** pris dans un ensemble E ayant n objets au total, on parle d'arrangement sans répétition et on le note A_k^n. On a

$$A_k^n = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{6.2}$$

puisque pour le premier objet de la suite il y a n choix possibles, pour le deuxième $(n-1)$ choix possibles, etc.

***Exemple* 6.3.**
Combien de mots de deux lettres utilisées au plus une fois peut-on former à l'aide des trois lettres A, B, C? Enumérons toutes les possibilités:
AB, AC, BA, BC, CA, CB;
il y en a donc 6, et on a bien aussi $A_2^3 = 3!/(3-2)! = 6$.

***Exemple* 6.4.**
Combien d'applications ***injectives*** *différentes peut-on définir d'un ensemble fini F comptant k éléments vers un ensemble fini G avec n éléments?*
La réponse est A_k^n.

6.3 Permutations

Une permutation de n objets ordonnés consiste à réordonner ces objets; cela correspond donc au cas particulier des arrangements sans répétition avec $k = n$. On note $P_n = A_n^n$ et on a

$$P_n = A_n^n = n! \tag{6.3}$$

(Rappelons que par convention $0! = 1$.)

***Exemple* 6.5.**
Combien de mots de trois lettres peut-on former à l'aide des trois lettres A, B, C?
Enumérons toutes les possibilités:
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA;
il y en a donc 6, et on a bien aussi $P_3 = 6$.

***Exemple* 6.6.**
Il y a P_n d'applications bijectives distinctes d'un ensemble comptant n éléments dans lui-même.

6.4 Permutations avec répétitions

On note $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ le nombre de permutations de n objets dont k_1 sont semblables, k_2 sont semblables, ... , k_m sont semblables, avec $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. On a

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \tag{6.4}$$

Exemple 6.7.
A partir des cinq lettres du mot LILLE, il est possible de former au total $P_5^{3,1,1} = 5!/(3!1!1!) = 20$ *mots différents.*

6.5 Combinaisons sans répétition

Lorsque l'on considère un sous ensemble de k objets **distincts** pris dans un ensemble E ayant n objets au total, on parle de combinaison[1] (ou combinaison sans répétition), et on la note C_k^n ou aussi $\binom{n}{k}$. Contrairement aux arrangements, l'ordre des k objets considérés n'entre pas en ligne de compte. On a

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{6.5}$$

Cette formule est obtenue en considérant d'abord un arrangement sans répétition de n objets pris k à k, puis en divisant par le nombre de permutations possibles de ces k objets (puisque l'ordre n'est pas pris en compte). Autrement dit,

$$C_k^n = \frac{1}{k!} A_k^n \tag{6.6}$$

Exemple 6.8.
On dispose d'une pomme, d'une poire, d'une orange et d'une banane. Le nombre de types de barquettes que l'on peut former contenant deux fruits différents parmi ces quatre est donné par $C_2^4 = 4!/(2!2!) = 6$.

Exemple 6.9.
Pour gagner à une certaine loterie, il faut deviner quels seront les six chiffres tirés sur un total de quarante cinq. Il y a donc C_6^{45} *possibilités au total, soit une chance sur 8'145'060 de deviner les bons numéros. A titre de comparaison, en Suisse il y a environ une chance sur 10'000 de périr dans un accident de la route sur une période d'une année.*

[1] On dit aussi parfois **combinaison simple** pour bien la différencier de la combinaison avec répétition qui sera abordée dans le paragraphe suivant.

6.6 Combinaisons avec répétitions

Lorsque l'on considère un sous ensemble (non ordonné) de k objets pris dans un ensemble E ayant n objets au total, on parle de combinaison avec répétition et on note $\overline{C}_k^n$. On a

$$\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \tag{6.7}$$

Exemple 6.10.
Si on dispose de pommes, de poires, d'oranges et de bananes, le nombre de types de barquettes différentes de deux fruits que l'on peut former à partir de ces quatre est donné par $\overline{C}_2^4 = \binom{5}{2} = 10$.

Exemple 6.11.
Considérons l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. *Le nombre de paires* (x, y) *avec* $x, y \in E$ *et* $x \leqslant y$ *est égal à* $\overline{C}_2^3 = 6$. *Ces 6 paires sont:*
$(1,1)$ $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(3,3)$.

Etablissement de la formule

La justification de (6.7) est moins évidente que pour les autres formules vues précédemment; voici une façon de raisonner qui permet d'établir cette formule. Le nombre de combinaisons avec répétitions de n objets pris k à k est égal au nombre de solutions entières $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ des relations $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n$, ou de façon équivalente $0 < a_1 < a_2 + 1 < \ldots < a_k + k - 1 < n + k$. Ce nombre est donc égal au nombre de solutions $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ des relations $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_k < n + k$. Autrement dit, c'est le nombre de combinaisons de $n + k - 1$ objets pris k à k, soit $C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

6.7 Récapitulatif

Pour appliquer une des formules vues dans ce chapitre à un problème à résoudre il suffit en général de déterminer si l'ordre est pris en compte ou non, ce qui indique s'il s'agit d'une permutation, d'un arrangement ou d'une combinaison, puis de déterminer s'il y a des répétitions ou non. Le tableau suivant récapitule les différentes formules.

	répétitions	
	sans	avec
permutations	$P_n = n!$	$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$
arrangements	$A_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{A}_k^n = n^k$
combinaisons	$C_k^n = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\overline{C}_k^n = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

TAB. 6.1 – Permutations, arrangements, combinaisons